

3. Strömungstechnische Grundlagen

Die Strömungstechnik befasst sich mit den Gesetzen der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen. Da die meisten dieser Gesetze gleichermaßen für Flüssigkeiten und Gase gelten, verwendet man den übergeordneten Begriff „Fluid“. Demzufolge ist ein Fluid entweder eine Flüssigkeit oder ein Gas. Die Strömungstechnik beschreibt somit die Mechanik der Fluide.

3.1 Druck

Betrachtet man ein Volumenelement eines ruhenden Fluids, das aus seiner Umgebung herausgelöst ist, muss der mechanische Einfluss seiner Umgebung durch entsprechende Kräfte ersetzt werden, wenn sein ursprünglicher Zustand beibehalten werden soll. In Bild 43 ist ein Fluidelement mit den Ersatzkräften dargestellt.

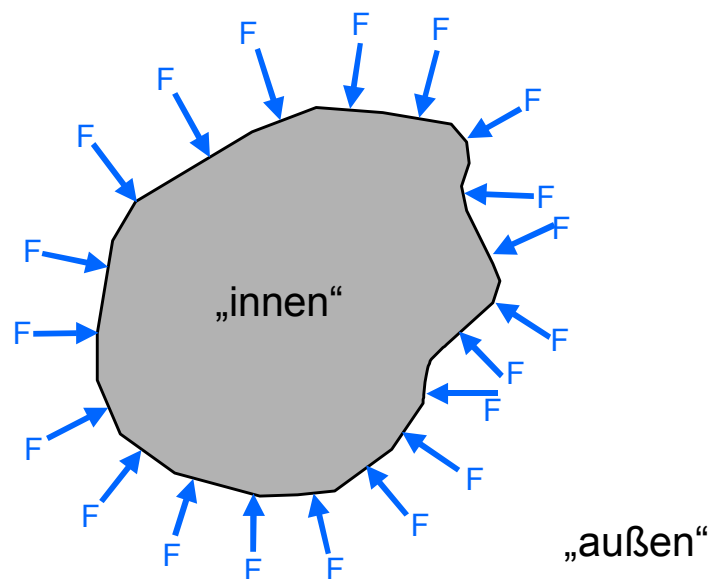


Bild 43: Gleichgewicht zwischen den Druckkräften an einem herausgelösten Volumenelement eines ruhenden Fluids

Für ein derartiges Fluidelement gelten folgende Grundsätze:

- Ein ruhendes Fluidelement kann nur Normalkräfte – das sind Kräfte, die rechtwinklig zu seiner Oberfläche wirken – aufnehmen. Es treten also keine Schubkräfte auf.
- Ein ruhendes Fluidelement kann nur Druckkräfte aufnehmen. Es treten also keine Zugkräfte auf.

Die Druckkraft auf ein einzelnes Fluidelement wächst mit der Größe seiner Oberfläche. Daher führt man zweckmäßigerweise die Druckkraft pro Flächeneinheit ein und nennt diese Größe „Druck“ mit dem Formelzeichen p . Die Einheit des Druckes ist das „Pascal“ **Pa**.

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} / \text{m}^2 = 1 \text{ kg} / (\text{m s}^2)$$

- In einem ruhenden Fluid hängt der Druck in einem Punkt nicht von der Orientierung des Flächenelements ab, auf das er wirkt. Der Druck ist für alle Richtungen gleich.

3.2 Dichte

Als Dichte ρ eines Fluids wird das Verhältnis zwischen der Masse dm und dem Volumen dV eines infinitesimal kleinen Volumenelementes definiert. Die Dichte hat die Maßeinheit kg / m^3 .

$$\rho = dm / dV \quad (39)$$

Flüssigkeiten unterscheiden sich von Gasen unter anderem dadurch, dass ihre Dichte nahezu unabhängig von Temperatur und Druck sind. Die Dichte von Gasen hängt dagegen sehr wohl von Druck und Temperatur ab. Bei Flüssigkeiten ist die Dichte ρ also eine Stoffkonstante, die man bei der Untersuchung eines Strömungsproblems von Anfang an kennt. In diesem Fall vereinfacht sich die Definitionsgleichung der Dichte (39) zu

$$\rho = m / V \quad (39a)$$

Bei Gasen kann die Dichte ρ an verschiedenen Stellen unterschiedliche Werte annehmen. Bei unveränderlicher Dichte spricht man von „inkompressiblen Fluiden“, während man bei veränderlicher Dichte von „kompressiblen Fluiden“ spricht.

In der Wittertechnik befasst man sich unter den inkompressiblen Fluiden im wesentlichen mit dem Fördermedium „Wasser“, dessen Dichte $\rho = 1000 \text{ kg} / \text{m}^3$ beträgt. Als kompressibles Fluid kommt in der Wittertechnik im wesentlichen das Fördermedium Luft (Wetter) vor. Entsprechend der „allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase“ (siehe Kapitel *Einführung in die Thermodynamik*) gilt für die Dichte von Luft in Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} \quad (40)$$

hierin ist

- p absoluter Druck bzw. Umgebungsluftdruck [in Pa = N / m²]
- T absolute Temperatur [in K]
die absolute Temperatur hat ihren Nullpunkt bei $-273,15 \text{ }^\circ\text{C} \equiv 0 \text{ K}$
- R Gaskonstante [in J / (kg K) = (N m) / (kg K)]
die Gaskonstante für Luft beträgt $R = 287,14 \text{ J} / (\text{kg K})$

Als Standard – Atmosphäre der Luft bezeichnet man den Zustand bei einem Umgebungsluftdruck von $p = 101\,325 \text{ Pa}$ und einer Temperatur von $15 \text{ }^\circ\text{C}$ (= $288,15 \text{ K}$). Damit ergibt sich für die Dichte der Standard-Atmosphäre von Luft ein Wert von

$$\rho = \frac{101\,325 \text{ N} / \text{m}^2}{287,14 \text{ N m} / (\text{kg K}) \cdot 288,15 \text{ K}} = 1,225 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Für meteorologische Zwecke wird für den Luftdruck das Hektopascal (hPa) benutzt. Dabei gilt $1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$ bzw. $101.325 \text{ Pa} = 1013,25 \text{ hPa}$.

Der Luftdruck nimmt mit der Teufe zu bzw. er nimmt mit zunehmender Höhe ab. Entsprechend einer Vereinbarung aus der internationalen zivilen Luftfahrt (ICAO – International Civil Aviation Organisation) errechnet sich der Luftdruck bis zu 11 000 m Höhe (Troposphäre) nach der sogenannten Höhenformel:

$$p = p_0 \cdot \left(\frac{287 - 0,0065 H}{287} \right)^{5,255} \quad (41)$$

darin ist

- p_0 der Umgebungsluftdruck auf Bezugsniveau
- H die Höhe in Metern über (unter) dem Bezugsniveau

Beträgt beispielsweise der Luftdruck über Tage 101 325 Pa (=1013,25 hPa), dann ergibt sich nach der Höhenformel bei einer Teufe von 800 m ($H = -800$ m) ein Luftdruck von 111 324 Pa (= 1113,52 hPa). Der Luftdruck ist also um etwa 100 hPa = 10^4 Pa höher als an der Tagesoberfläche. Vereinfachend kann gesagt werden, dass pro 8 Meter Teufenzunahme der Luftdruck um etwa 1 hPa zunimmt.

Die Dichte der Wetter in einer Teufe von 800 m beträgt demnach bei einem Luftdruck von 1113,51 hPa und einer Temperatur von 18 °C (= 291,15 K)

$$\rho = \frac{111.352 \text{ N / m}^2}{287,14 \text{ N m / (kg K)} \cdot 291,15 \text{ K}} = 1,332 \text{ kg / m}^3$$

Nach der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase (13) gilt für zwei verschiedene Temperaturen bei gleichem Druck

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{oder} \quad \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{T_1}{T_2} \quad (42)$$

bzw. für zwei verschiedene Drücke bei gleicher Temperatur

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{oder} \quad \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \quad (43)$$

Es ist anzumerken, dass diese Beziehungen für trockene Luft gelten. Die Gaskonstante feuchter Luft ist stets größer als diejenige trockener Luft (siehe Kapitel 2.10). Daher ist die Dichte von feuchter Luft stets etwas geringer als diejenige von trockener Luft.

3.3 Hydrostatik

Es wird ein inkompressibles homogenes Fluid mit freier Oberfläche unter dem Einfluss der Schwerkraft betrachtet (Bild 44). An der Oberfläche herrscht der Umgebungsdruck p_0 . Für ein zylindrisches Fluidelement mit der Tiefe h und der Querschnittsfläche dA gilt das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung:

$$p \cdot dA = p_0 \cdot dA + \rho \cdot g \cdot h \cdot dA$$

oder

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad (44)$$

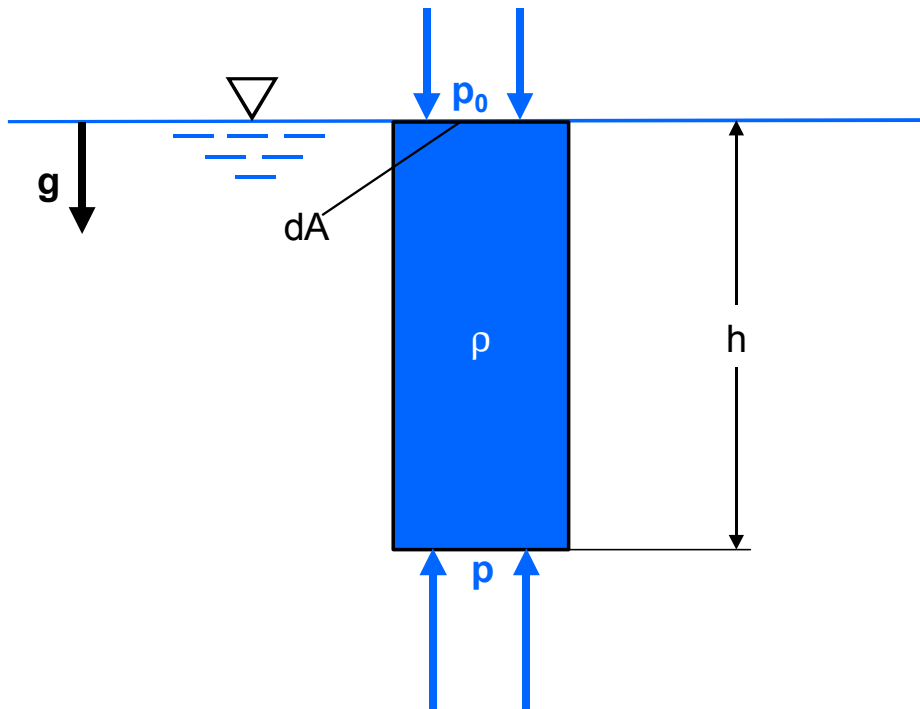


Bild 44: Kräftegleichgewicht an einem zylindrischen Fluidelement mit vertikaler Achse

Diese Beziehung wird als „Grundgleichung der Hydrostatik“ bezeichnet. Daraus folgt:

- In einem inkompressiblen, ruhenden Fluid herrscht in Punkten gleicher Tiefe der gleiche Druck.
- In einem inkompressiblen, ruhenden Fluid steigt der Druck linear mit zunehmender Tiefe bzw. fällt der Druck linear mit zunehmender Höhe.

Nachfolgend werden einige Anwendung der Grundgleichung der Hydrostatik (44) gezeigt:

3.3.1 Kommunizierende Röhren

Die Röhren sind mit einem homogenen Fluid gefüllt und unterhalb der freien Oberfläche miteinander verbunden (Bild 45). Da der Druck in beiden Schenkeln an den freien Oberflächen der Röhren gleich dem Atmosphärendruck p_0 ist, müssen sich beide Oberflächen auf gleicher Höhe befinden.

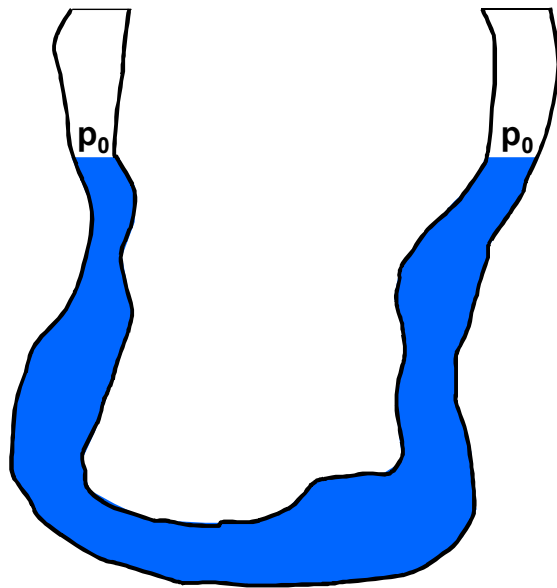


Bild 45: Kommunizierende Röhren

3.3.2 Pascalsches Paradoxon

Verschieden geformte Gefäße sind mit demselben homogenen Fluid gleich hoch gefüllt (Bild 46). Die Druckkraft F auf ihre Grundflächen ist – unabhängig von der Gefäßform – gleich groß, wenn die Grundflächen gleich groß sind. Bei gleicher Grundfläche ist die Druckkraft F also unabhängig von der Masse des darüber befindlichen Fluids.

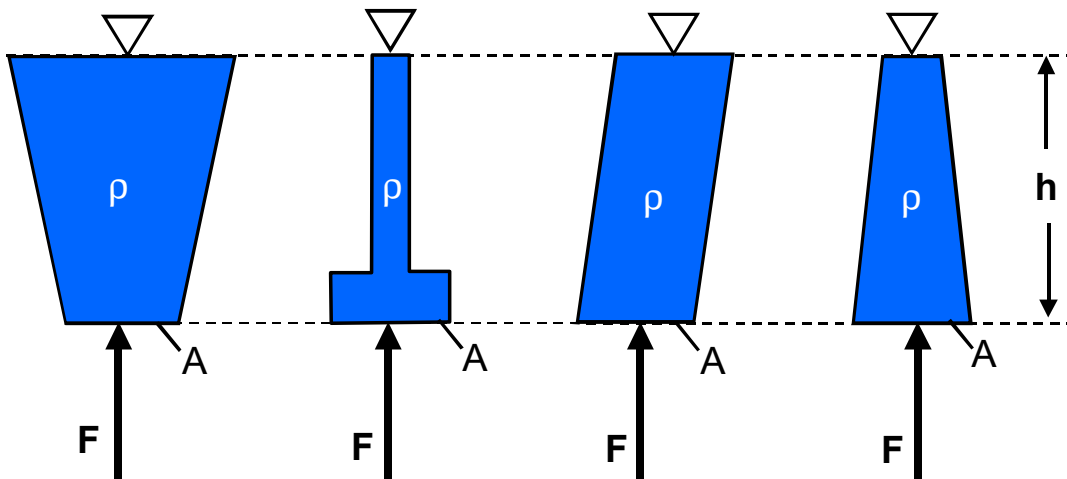


Bild 46: Pascalsches Paradoxon

3.3.3 U-Rohr-Manometer

An einen mit Gas gefüllten Kessel, in dem der konstante Innendruck p_{Gas} herrscht, ist ein U-Rohr konstanten Innenquerschnitts angeschlossen, in dem sich ein Fluid der Dichte ρ_{Fluid} befindet (Bild 47). Die Grundgleichung der Hydrostatik (44) liefert die Beziehung

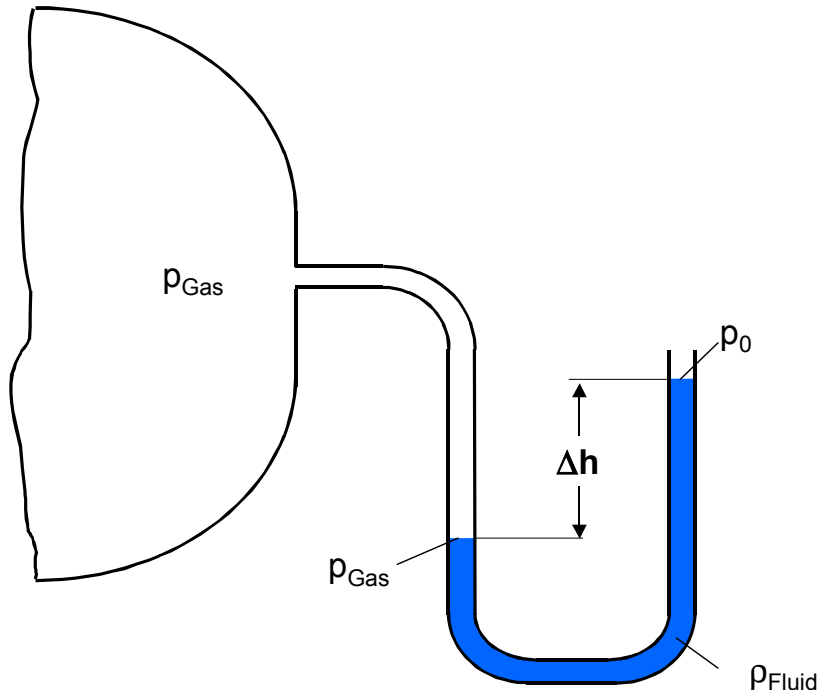


Bild 47: U-Rohr-Manometer

$$p_{\text{Gas}} = p_0 + \rho_{\text{Fluid}} \cdot g \cdot \Delta h$$

Die Höhendifferenz Δh der beiden Fluidsäulen im U-Rohr ist ein Maß für die Druckdifferenz zwischen dem Kessel und der Umgebung. Früher wurden daher Druckdifferenzen in Millimeter Wassersäule (mm WS) beziehungsweise in Millimeter Quecksilbersäule (mm Hg) angegeben. Diese Angaben entsprachen dann einem mit Wasser bzw. mit Quecksilber gefüllten U-Rohr-Manometer.

3.3.4 Präzisionsmanometer nach Prandtl

Hierbei handelt es sich um ein U-Rohr-Manometer mit sehr unterschiedlichen Querschnittsflächen A_1 und A_2 der Schenkel, wobei $A_2 \gg A_1$ (Bild 48). Die Bezugsebene stellt die Lage der freien Oberflächen bei Druckgleichheit $p_2 = p_1$ dar. Wird $p_2 > p_1$, dann fließt Manometerflüssigkeit aus dem linken in den rechten Schenkel. Für das überfließende Flüssigkeitsvolumen gilt

$$V = A_1 \cdot h_1 = A_2 \cdot h_2 \tag{45}$$

Die Grundgleichung der Hydrostatik (44) liefert die Beziehung

$$p_2 - \rho \cdot g \cdot h_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1$$

Aus Gleichung (45) folgt damit

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right) \tag{46}$$

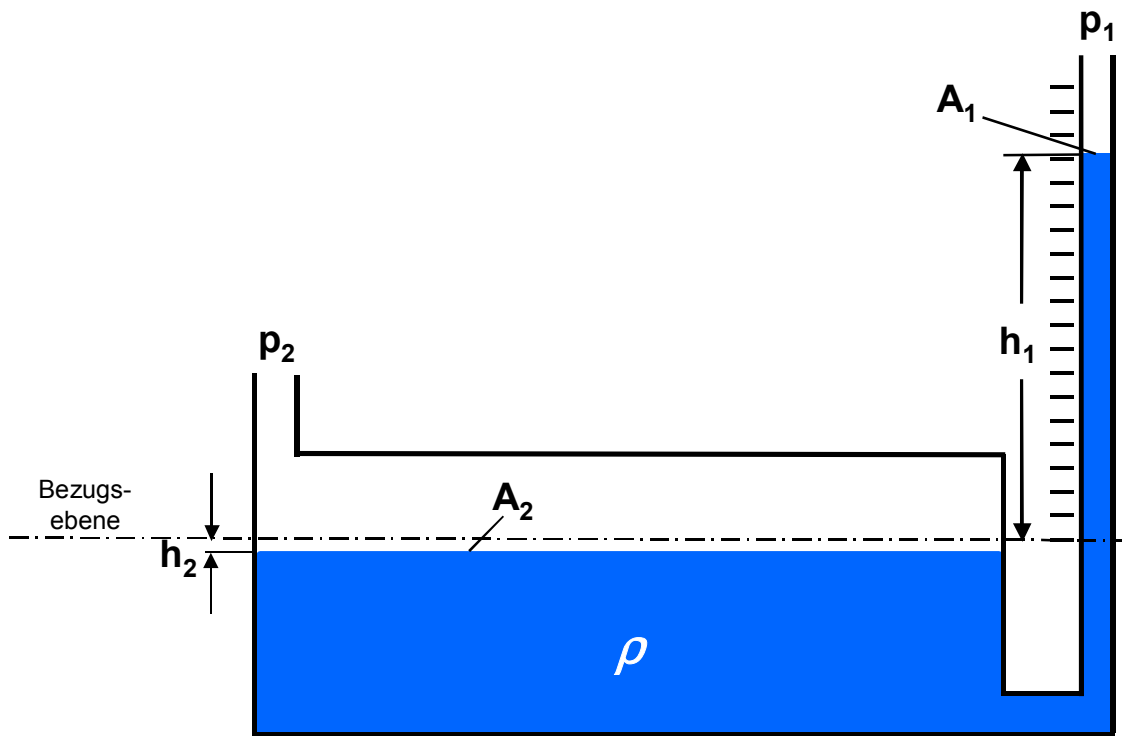


Bild 48: Präzisionsmanometer nach Prandtl

Wenn das Verhältnis A_1 / A_2 sehr klein gewählt wird, dann kann für Gleichung (46) näherungsweise geschrieben werden

$$p_2 - p_1 \approx \rho \cdot g \cdot h_1 \quad (46a)$$

Es ist dann möglich, neben den Schenkel 1 anstelle von h_1 eine feste Skala zur Bestimmung der Druckdifferenz $p_2 - p_1$ anzubringen.

3.3.5 Barometer

Während U-Rohr-Manometer und Prandtl-Manometer zur Messung von Druckdifferenzen dienen, ist das Barometer ein Instrument zur Messung absoluter Drücke (Bild 49):. Das Barometer ist ein spezielles U-Rohr-Manometer mit sehr unterschiedlichen Schenkelquerschnitten, wobei der dünne Schenkel oben verschlossen ist. Bei entsprechender Länge des dünnen Schenkels (Länge $> 10,33$ m bei Wasser als Barometerflüssigkeit; Länge $> 0,76$ m bei Quecksilber als Barometerflüssigkeit) herrscht an seinem oberen Ende Vakuum ($p = 0$). Die Grundgleichung der Hydrostatik (44) liefert dafür die Beziehung

$$p_{\text{Umgebung}} = \rho \cdot g \cdot h$$

Verwendet man Wasser ($\rho = 1000 \text{ kg / m}^3$) als Barometerflüssigkeit, dann ergibt eine Wassersäule von 10,33 m Höhe einen Druck von

$$p = 1\,000 \text{ kg / m}^3 \cdot 9,81 \text{ m / s}^2 \cdot 10,33 \text{ m} = 101\,325 \text{ (kg m) / (s}^2 \text{ m}^2) = 101\,325 \text{ Pa.}$$

Verwendet man Quecksilber ($\rho = 13\,600 \text{ kg / m}^3$) als Barometerflüssigkeit, dann ergibt eine Quecksilbersäule von 0,76 m Höhe einen Druck von

$$p = 13\,600 \text{ kg / m}^3 \cdot 9,81 \text{ m / s}^2 \cdot 0,76 \text{ m} = 101\,325 \text{ (kg m) / (s}^2 \text{ m}^2) = 101\,325 \text{ Pa.}$$

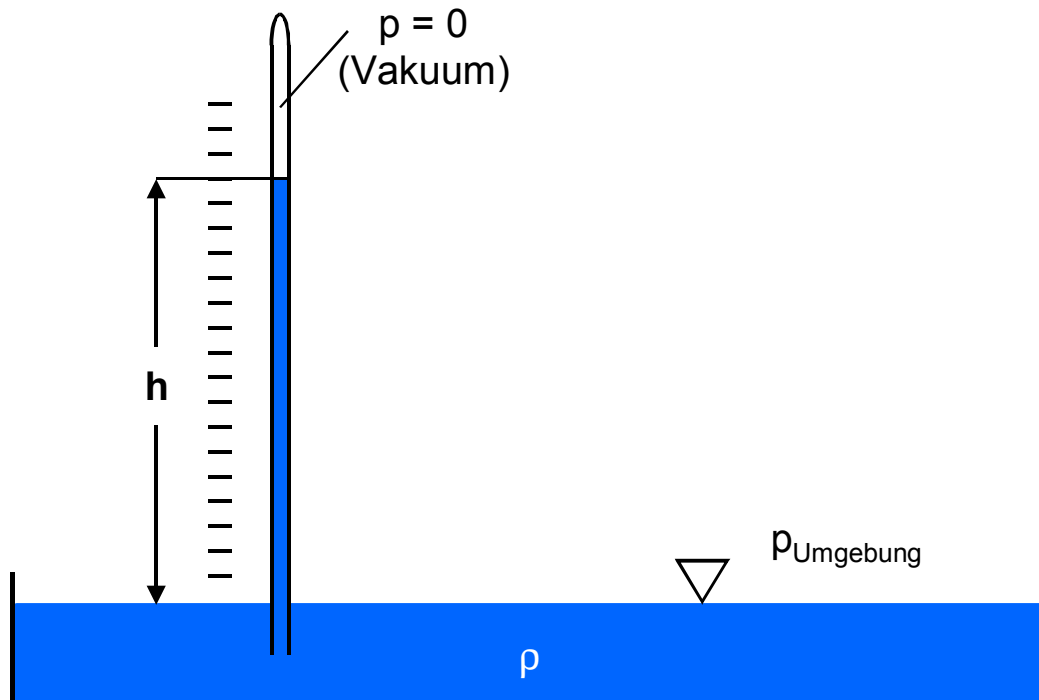
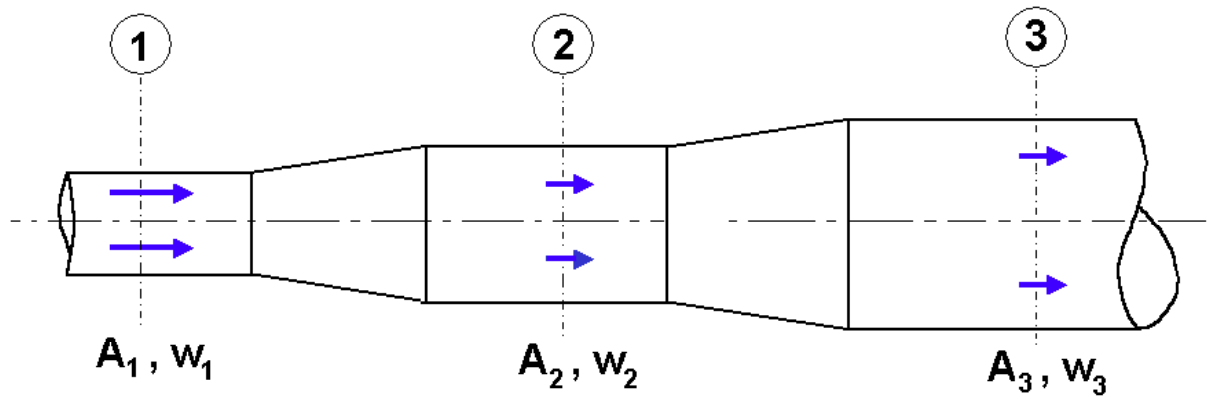


Bild 49: Barometer

3.4 Massenerhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung)

Bei der Strömung eines Fluids verschwindet an keiner Stelle Materie, es entsteht aber auch an keiner Stelle auf dem Strömungsweg neue Materie. Das bedeutet auf eine stationäre Strömung bezogen, dass durch jeden Querschnitt **A** einer Stromröhre in der gleichen Zeit der gleiche Massenstrom \dot{m} , das heißt Masse pro Zeiteinheit strömen muss.

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = A_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1 = A_2 \cdot w_2 \cdot \rho_2 = A_3 \cdot w_3 \cdot \rho_3 \quad (47)$$



$$w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

$$w_3 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_3}$$

Bild 50: Kontinuitätsgleichung

darin sind

$\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3$ Massenstrom an den Stellen „1“, „2“ und „3“ in kg / s

A_1, A_2, A_3 Querschnittsfläche einer Stromröhre an den Stellen „1“, „2“ und „3“ in m^2

w_1, w_2, w_3 Strömungsgeschwindigkeiten an den Stellen „1“, „2“ und „3“ in m / s

ρ_1, ρ_2, ρ_3 Dichte an den Stellen „1“, „2“ und „3“ in kg / m^3

Bei einem inkompressiblen Fluid ändert sich bei Strömungsvorgängen auch sein Volumen nicht. Das bedeutet, dass bei inkompressiblen Fluiden durch jeden Querschnitt A einer

Stromröhre in der gleichen Zeit der gleiche Volumenstrom \dot{V} , das heißt Volumen pro Zeiteinheit (m^3 / s) strömen muss (Bild 50).

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3 = A_1 \cdot w_1 = A_2 \cdot w_2 = A_3 \cdot w_3 \quad (48)$$

3.5 Bernoulli-Gleichung

Der erste Hauptsatz für stationäre Fließprozesse (siehe Kapitel 2.8) mit der Höhenkoordinate z und der Erdbeschleunigung g lautet:

$$q_{1/2} + w_{t\ 1/2} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \cdot (w_2^2 - w_1^2) + g \cdot (z_2 - z_1) \quad (29)$$

mit der spezifischen Enthalpie $h = u + p \cdot v$.

Im Falle einer inkompressibler Strömung bleibt das spezifische Volumen des Fluids konstant ($v_1 = v_2$). Wenn zusätzlich keine Wärmez- oder Abfuhr erfolgt ($q_{1/2} = 0$), ändert sich auch die innere Energie des Fluids nicht ($u_1 = u_2$). Wenn obendrein keine Zu- oder Abfuhr von mechanischer Arbeit stattfindet ($w_{t\ 1/2} = 0$), wird der erste Hauptsatz für stationäre

Fließprozesse „Bernoulli-Gleichung“ (*Daniel Bernoulli, schweizerischer Mathematiker und Physiker; befasste sich mit hydrodynamischen Problemen und schuf erste Ansätze zu einer kinetischen Gastheorie, 1700 – 1782*) genannt. Je nach der bevorzugten Einheit der einzelnen Glieder verwendet man die Bernoulli – Gleichung in drei verschiedenen Formen.

Energieform:
$$\frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \quad (49)$$

Die einzelnen Glieder der Bernoulli-Gleichung in der Energieform (49) sind auf die Masse bezogene Energiebeiträge mit der Einheit **J / kg** (Joule pro Kilogramm).

Höhenform:
$$\frac{w_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 = \frac{w_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 \quad (50)$$

Die Glieder der Bernoulli-Gleichung in der Höhenform (50) heißen in der angegebenen Reihenfolge „Geschwindigkeitshöhe“, „Drückhöhe“ und „geodätische Höhe“. Die jeweilige Einheit ist **m** (Meter)

Druckform:
$$\frac{\rho}{2} \cdot w_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 \quad (51)$$

Die einzelnen Glieder der Bernoulli – Gleichung in der Druckform (51) haben die Einheit **Pa** (Pascal). Für die drei Summanden in der Gleichung (51) werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- $(\rho / 2) \cdot w^2$ heißt „Staudruck“ oder „dynamischer Druck“ **p_d**. In der Praxis spürt man diesen Druck, wenn man beispielsweise seine Hand aus einem fahrenden Fahrzeug streckt.
- **p** wird als „statischer Druck“ bezeichnet und häufig mit der Abkürzung **p_s** geschrieben. Der statische Druck ist richtungsunabhängig.
- **p · g · z** wird „geodätischer Druck“ genannt. Er stellt denjenigen Druck dar, der durch die Gewichtskraft einer Fluidsäule auf eine bestimmte Fläche ausgeübt wird.

Schließlich benutzt man für

- **p_s + (ρ / 2) · w²** die Abkürzung **p_t** und bezeichnet dies als „Gesamtdruck“.

Die Bernoulli-Gleichung besagt, dass bei stationärer Strömung für jeden Punkt der Strömung die Summe aus statischem Druck, Staudruck und geodätischem Druck konstant ist. Bei horizontaler Strömung kann in der Bernoulli – Gleichung der geodätische Druck vernachlässigt werden, da er auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich ist. Bild 51 veranschaulicht diesen Zusammenhang bei einer Strömung durch einen Kanal mit verändertem Querschnitt.

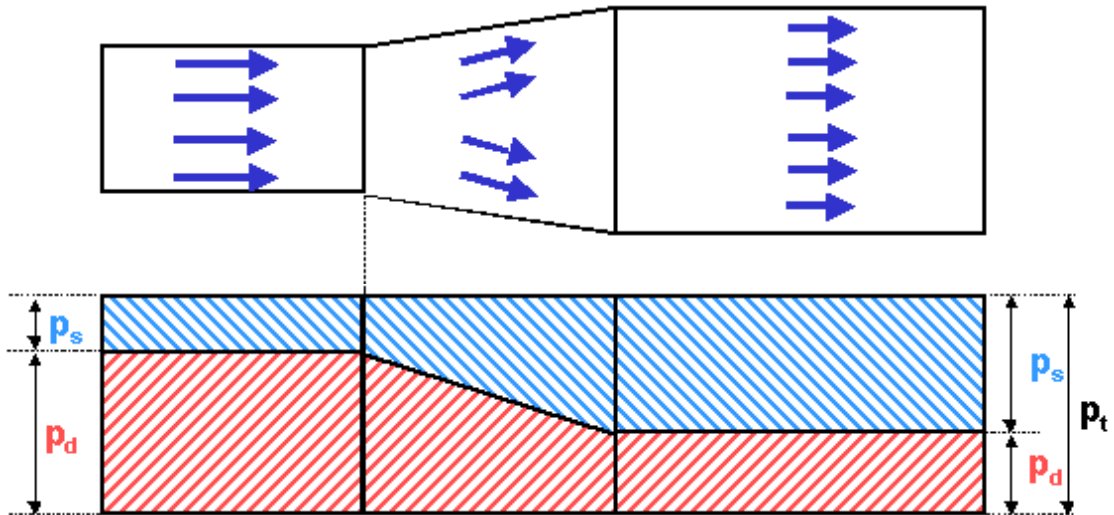


Bild 51: Bernoulli-Gleichung bei horizontaler Strömung

3.6 Praktische Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

3.6.1 Ausströmen aus einem offenen Gefäß

In einem oben offenen Behälter befindet sich an seinem Grund eine Öffnung, durch die Flüssigkeit ausströmt. Der in der Umgebung des Behälters herrscht der Druck p_0 . Wir nehmen an, die Ausflussöffnung sei so klein gegenüber dem Behälterquerschnitt, dass die Sinkgeschwindigkeit des Flüssigkeitsspiegels und damit die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Behälter vernachlässigt werden kann (Bild 52).

Wendet man die Bernoulli-Gleichung (49) in der Energieform an, dann erhält man wegen

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_2 = p_0 \\
 \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot h_2 &= \frac{p_0}{\rho} + g \cdot h_1 \\
 \frac{1}{2} \cdot w_2^2 &= g \cdot (h_1 - h_2) \qquad (52)
 \end{aligned}$$

Daraus erhält man die „Torricellische Ausflussformel“ (*Evangelista Torricelli, italienischer Mathematiker und Physiker, erfand das Quecksilberbarometer, 1608 – 1647; nach ihm ist die Einheit „Torr“ benannt. Torr ist eine nicht gesetzliche Einheit des Drucks, besonders des Luftdrucks: 1 Torr = 1,33322 hPa = 133,322 Pa*) für reibungslose Strömungen:

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad (53)$$

Die Ausflussformel (53) gilt unabhängig von der Ausflussrichtung. Deshalb erhält man in den

drei dargestellten Fällen (Bild 52) die gleiche Austrittsgeschwindigkeit w_2 . Auch die Dichte der Flüssigkeit hat keinen Einfluss auf die Austrittsgeschwindigkeit.

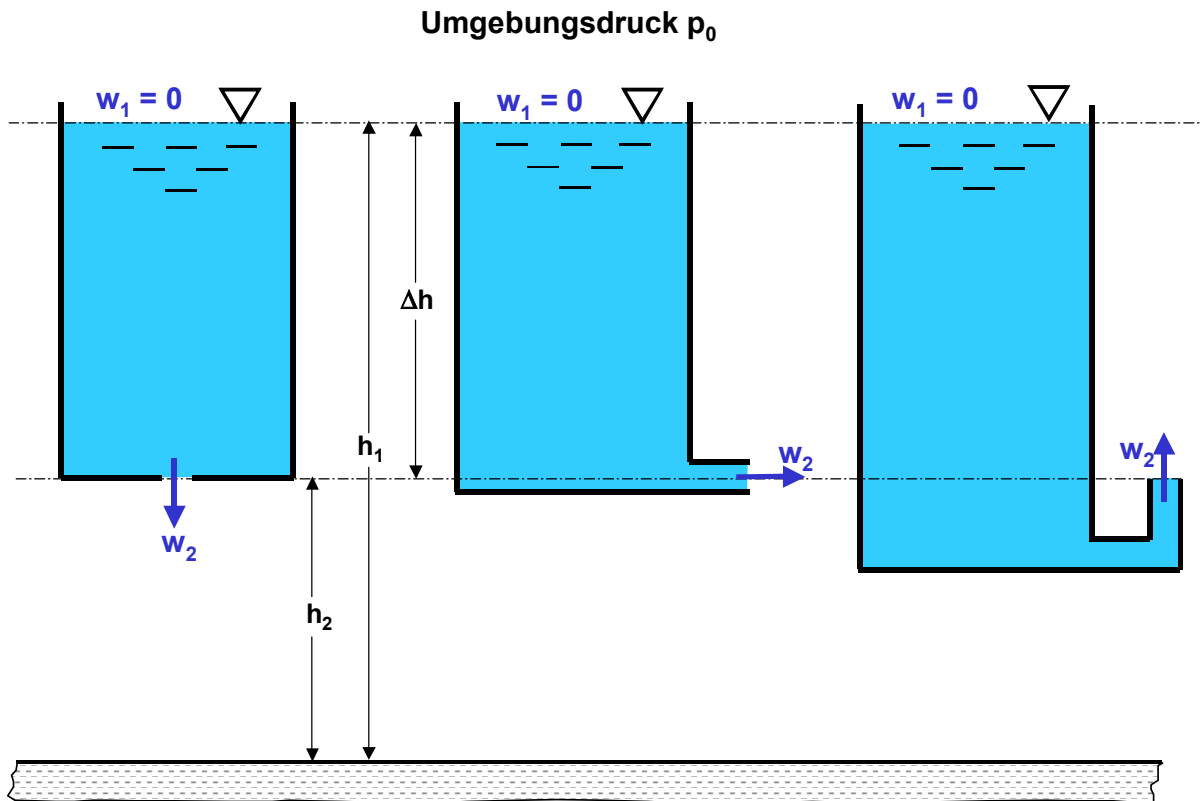


Bild 52: Ausfluss von Flüssigkeit aus Gefäßen mit unterschiedlich angeordneten Ausflussöffnungen

3.6.2 Staupunkt-Strömung

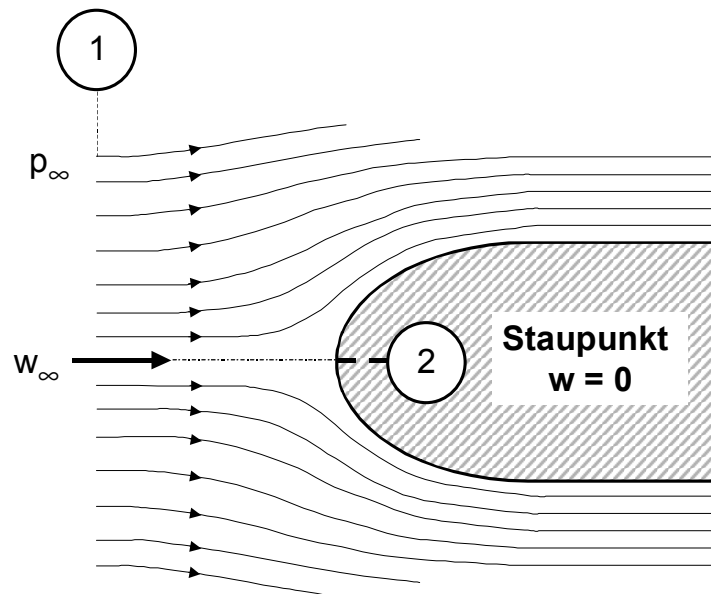


Bild 53: Staupunkt-Strömung

Ein fester Körper wird von einer Strömung mit konstanter Geschwindigkeit w_∞ umströmt (Bild 53). Für diesen Fall betrachtet man einen Stromfaden, der im Staupunkt des Körpers endet oder – präziser gesagt – sich im Staupunkt zerteilt und die Außenseite des Körpers umströmt. In weiter Entfernung vom Körper bleibt die Strömung ungestört. Für den Stromfaden zwischen dem weit stromaufwärts gelegenen Punkt ① mit dem Umgebungsdruck p_∞ und der Strömungsgeschwindigkeit w_∞ sowie dem Staupunkt ② kann die Bernoulli-Gleichung (51) ohne Höhenglied verwendet werden, da es sich um eine horizontale Strömung handelt.

$$\left(\frac{\rho}{2}\right) \cdot w_\infty^2 + p_\infty = p_2 = p_t \quad (54)$$

Der Druck im Staupunkt ist also gleich dem Gesamtdruck p_t .

3.6.3 Pitot-Rohr

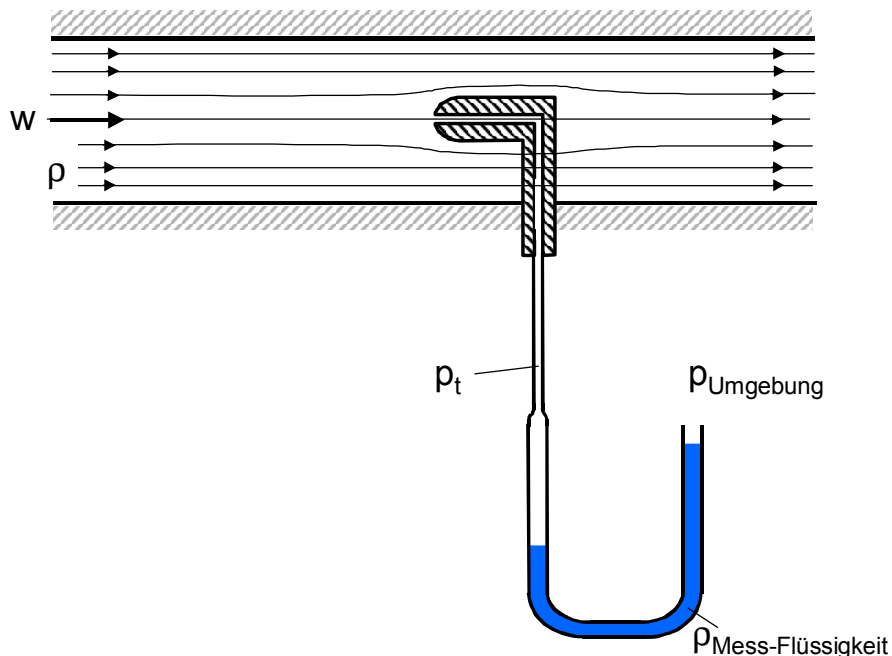


Bild 54: Pitot-Rohr

Bild 54 zeigt ein Pitot-Rohr (*Henri Pitot, französischer Physiker, 1695 – 1771*), das ist eine Sonde zur Messung des Gesamtdruckes p_t . Die Sonde ist an ihrem der Strömung zugewandten Ende abgerundet, so dass sich dort ein Staupunkt bildet. Im Staupunkt mündet über eine Bohrung im Pitot-Rohr eine Druckleitung, in der nach Gleichung (54) der Gesamtdruck p_t herrscht. Diese Druckleitung wird auf den einen Schenkel eines U-Rohr-Manometers geschaltet. Am anderen Schenkel des U-Rohr-Manometers herrscht Umgebungsdruck.

3.6.4 Prandtl-Staurohr

Eine besondere Form des Pitot-Rohres stellt das Prandtl-Staurohr (*Ludwig Prandtl, deutscher Physiker; lehrte 1904-1947 in Göttingen; Mitbegründer der Aero- und Hydrodynamik, Leiter des Instituts für Strömungslehre in Göttingen; untersuchte die Ausbildung der Grenzschicht zwischen strömender Flüssigkeit und ruhender Wand sowie die Umströmung von Tragflügeln (Göttinger Tragflügelprofil), 1875 – 1953*) dar. An der Bohrung

im zylindrischen Teil der Sonde herrscht statischer Druck in der Strömung. An dieser Bohrung mündet die entsprechende Druckleitung. Der Gegendruck zum Gesamtdruck p_t am Manometer ist bei Verwendung des Prandtl-Staurohrs der statische Druck p_s in der Strömung.

$$p_t - p_s = (\rho / 2) \cdot w^2 = p_d \quad (55)$$

Mit einer Messanordnung entsprechend Bild 55 kann also der Staudruck direkt gemessen werden. Wenn die Dichte der Mess-Flüssigkeit $\rho_{\text{Mess-Flüssigkeit}}$ im Manometer bekannt ist, lässt sich daraus die Strömungsgeschwindigkeit w berechnen:

$$\begin{aligned} (\rho / 2) \cdot w^2 &= \rho_{\text{Mess-Flüssigkeit}} \cdot g \cdot h \\ w &= \sqrt{(\rho_{\text{Mess-Flüssigkeit}} / \rho) \cdot 2 \cdot g \cdot h} \end{aligned} \quad (56)$$

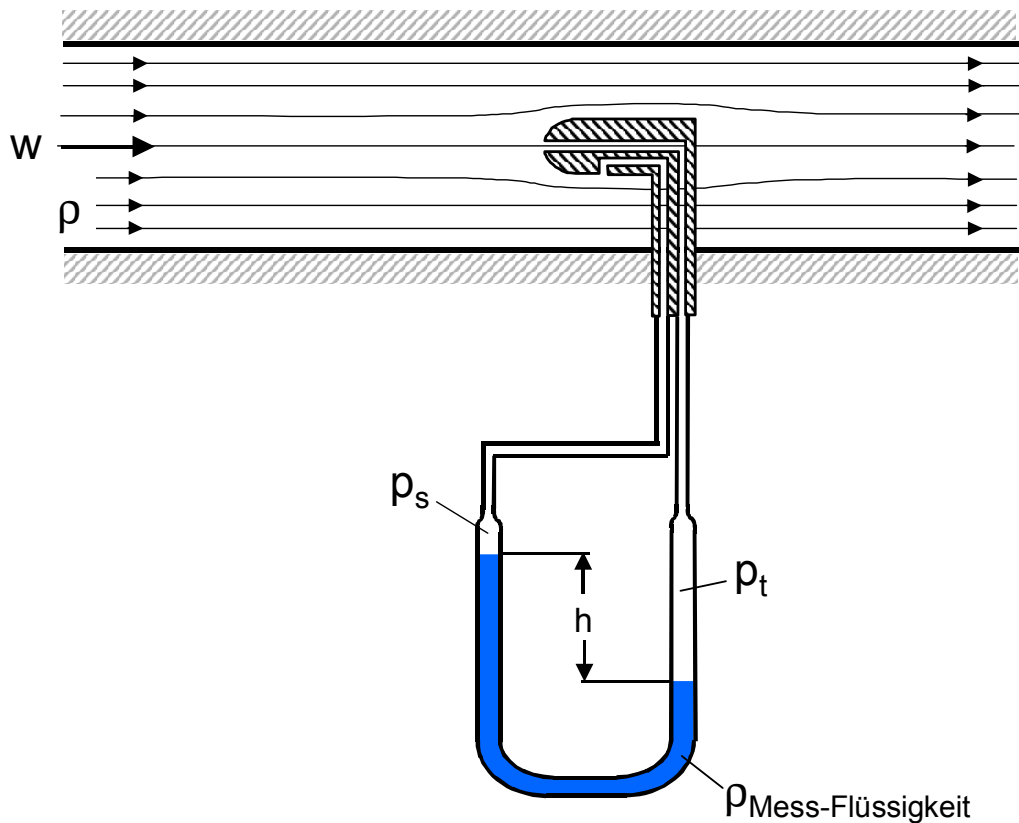


Bild 55: Prandtl-Staurohr

Will man beispielsweise die Geschwindigkeit w eines Luftstroms ($\rho = 1,25 \text{ kg / m}^3$) messen, dann ergibt bei Wasser als Mess-Flüssigkeit im Manometer ($\rho_{\text{Mess-Flüssigkeit}} = 1000 \text{ kg / m}^3$) und einer Höhendifferenz der Flüssigkeitssäulen im U-Rohr-Manometer von $h = 15 \text{ mm}$ ($=0,015 \text{ m}$)

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{(1000 \text{ kg / m}^3 / 1,25 \text{ kg / m}^3) \cdot 2 \cdot 9,81 \text{ m / s}^2 \cdot 0,015 \text{ m}} \\ w &= 15,34 \text{ m / s.} \end{aligned}$$

3.6.5 Venturi-Rohr

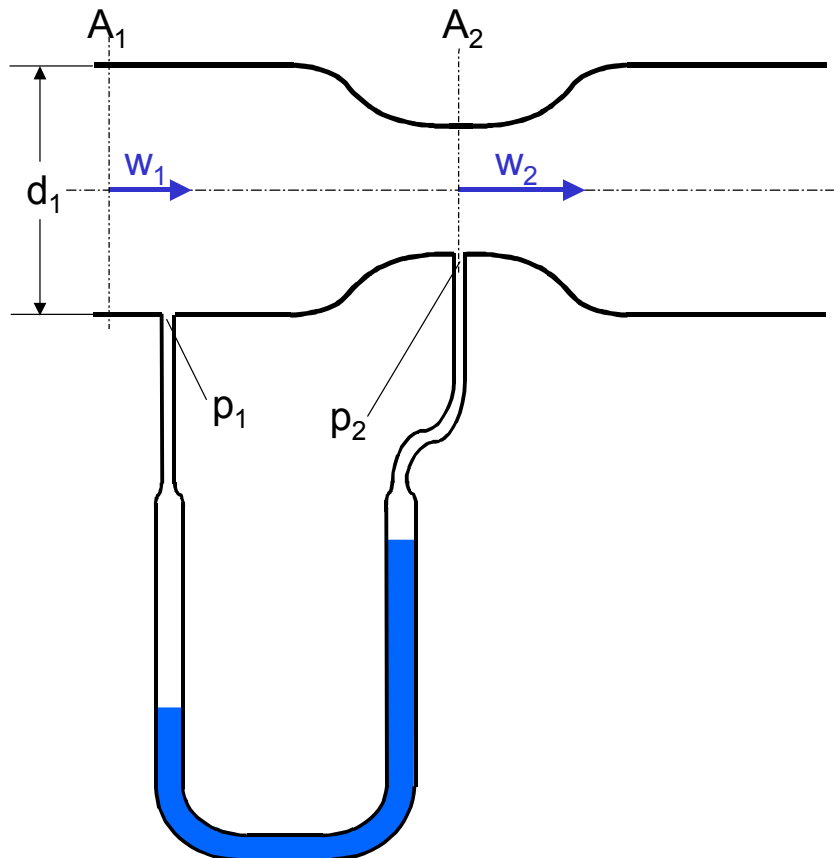


Bild 56: Venturi-Rohr

Bild 56 zeigt ein Venturi-Rohr (*G. B. Venturi, italienischer Physiker, 1746 – 1822*), mit dem man Strömungsgeschwindigkeiten und somit auch Volumenströme weitgehend verlustfrei messen kann. Die Bernoulli-Gleichung 51 ohne Höhenglied lautet hier:

$$\left(\rho / 2\right) \cdot w_1^2 + p_1 = \left(\rho / 2\right) \cdot w_2^2 + p_2 \quad (57)$$

Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide (48) lautet hier:

$$A_1 \cdot w_1 = A_2 \cdot w_2$$

$$w_2 = \left(A_1 / A_2\right) \cdot w_1 \quad (58)$$

Formt man Gleichung (57) um und setzt Gleichung (58) in (57) ein, folgt:

$$p_1 - p_2 = \left(\rho / 2\right) \cdot w_1^2 \cdot \left\{ \left(A_1 / A_2\right)^2 - 1 \right\} \quad (59)$$

Will man mit einem Venturi-Rohr die Strömungsgeschwindigkeit messen, erhält man aus Gleichung (59):

$$w_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot \left\{ \left(A_1 / A_2\right)^2 - 1 \right\}}} \quad (60)$$

sowie für den Volumenstrom:

$$\dot{V} = w_1 \cdot A_1 = w_1 \cdot (\pi / 4) \cdot d_1^2 \quad (61)$$

3.6.6 Druckmessungen in einer Leitung

Bei einem strömenden Fluid in einer Rohrleitung herrscht allgemein gegenüber dem Umgebungsdruck außerhalb der Leitung

- auf der Druckseite eines Druckerzeugers (z. B. Ventilators) **Überdruck**
- auf der Saugseite eines Druckerzeugers (z. B. Ventilators) **Unterdruck**

Die Bilder 57 und 58 stellen die prinzipiellen Möglichkeiten zur Messung der drei Drücke p_s , p_t und p_d dar. Der statische Druck kann beispielsweise an einer sauber entgrateten Wandbohrung entnommen werden. Zweckmäßigerweise bringt man über den Umfang verteilt mehrere Wandbohrungen an und verbindet diese über eine Ringleitung miteinander. Δp_s ist der statische Über- bzw. Unterdruck gegenüber dem Umgebungsdruck in der freien Atmosphäre.

Messort in der Leitung	statischer Druck p_s	Gesamtdruck p_t	Staudruck p_d
Druckseite des Druckerzeugers	$p_s = p_0 + \Delta p_s$	$p_t = p_0 + \Delta p_t = p_0 + p_d + \Delta p_s$	$p_d = p_t - p_s$
Saugseite des Druckerzeugers	$p_s = p_0 - \Delta p_s$	$p_t = p_0 - \Delta p_t = p_0 + p_d - \Delta p_s$	$p_d = p_t - p_s$

Tabelle 3: Messung des statischen Drucks, des Gesamtdrucks und des Staudrucks

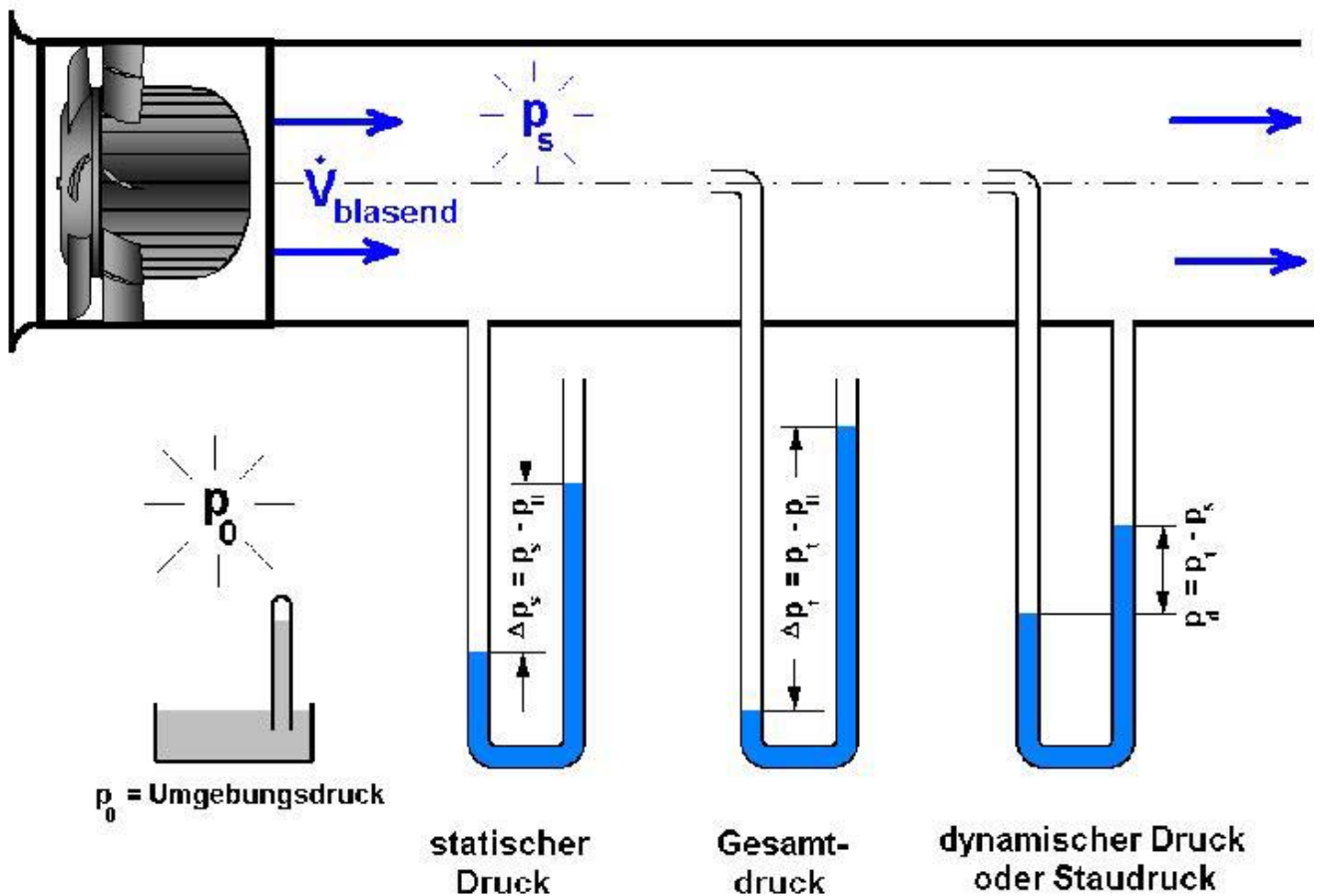


Bild 57: Druckmessung auf der Druckseite eines Ventilators

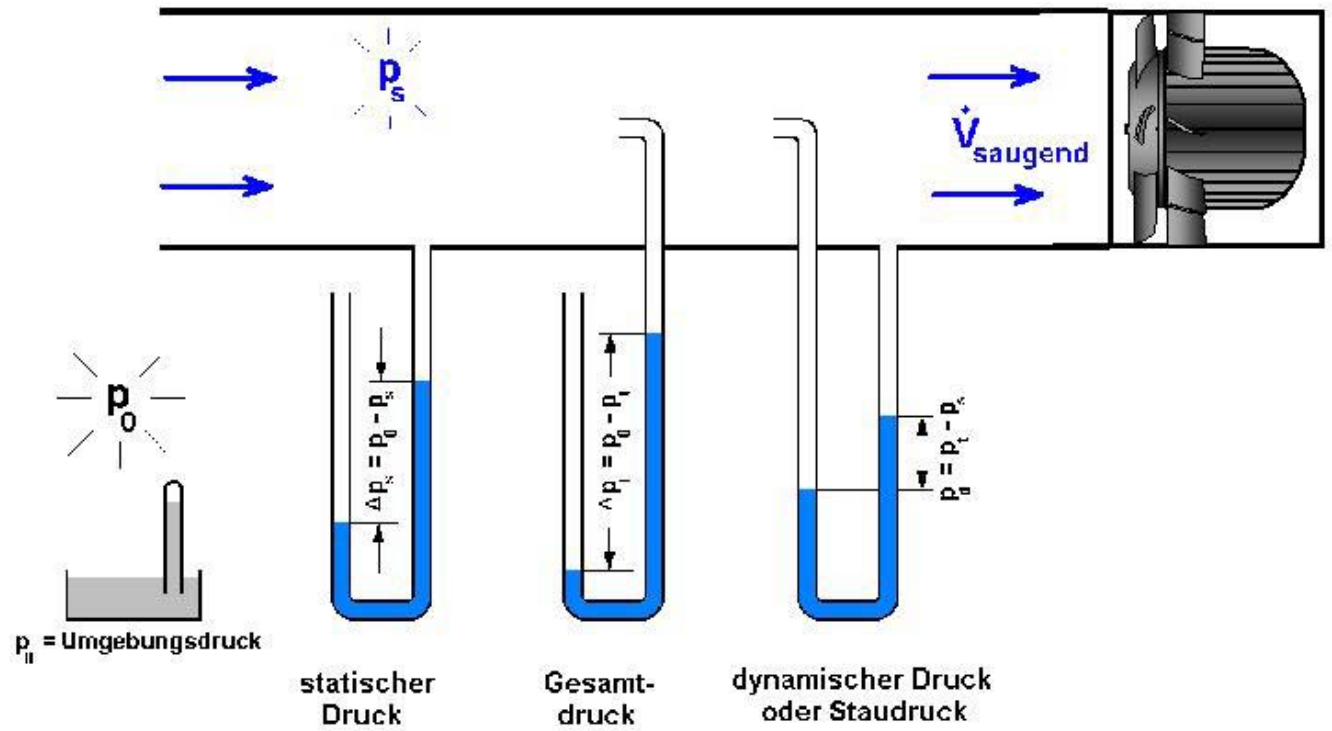


Bild 58: Druckmessung auf der Saugseite eines Ventilators

3.7 Übungsaufgaben zum Thema „Bernoulli-Gleichung“

3.7.1 Reibungslose Flüssigkeitsströmung in einem Rohr

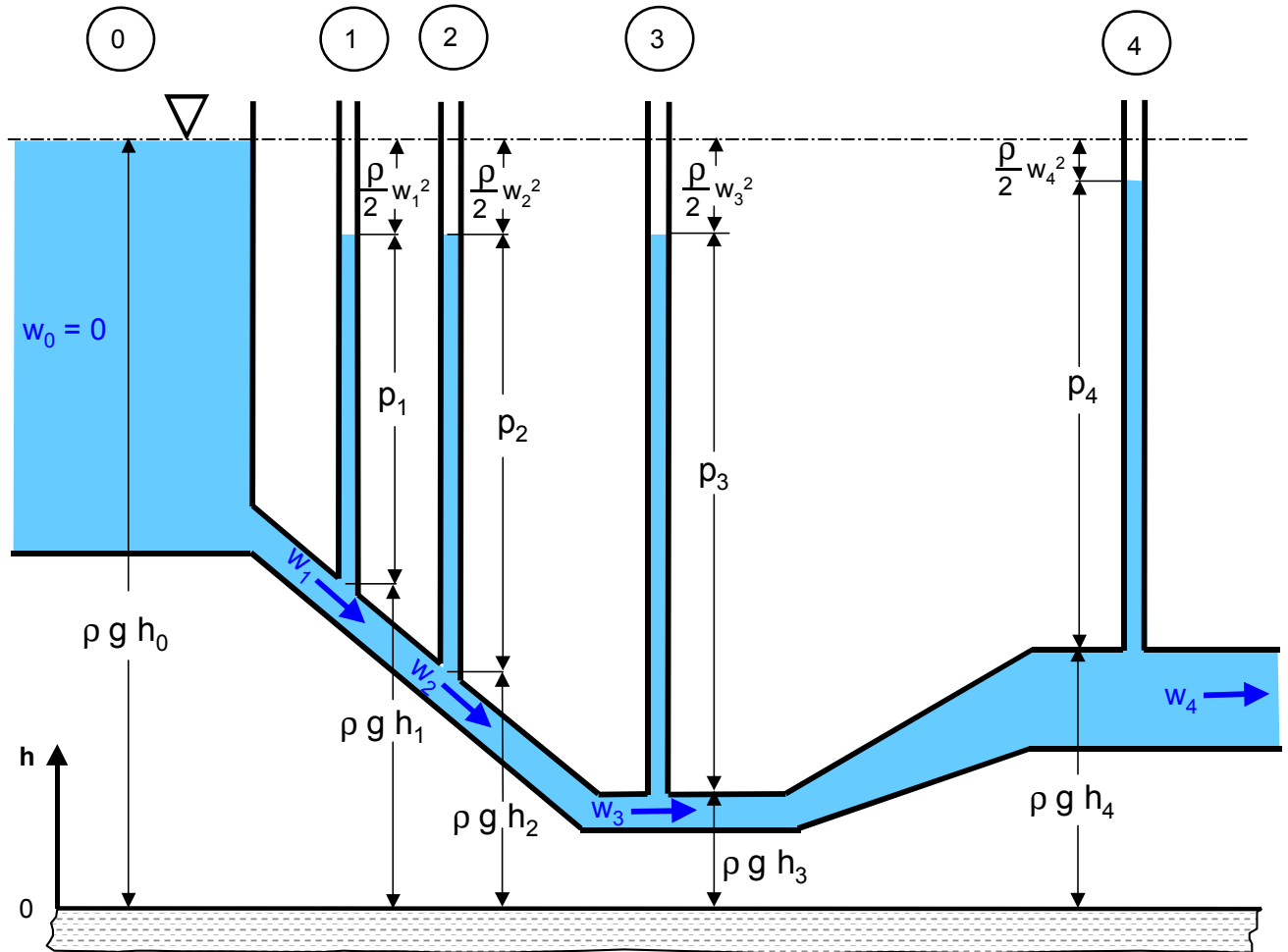


Bild 59: Reibungslose Flüssigkeitsströmung in einem Rohr

Durch die in Bild 59 dargestellte Leitung fließt eine Flüssigkeit. An vier Stellen ist die Leitung mit Manometerröhren versehen. Entsprechend Gleichung (51) ist die Summe aus Staudruck, statischem Druck und geodätischem Druck an den vier Stellen ① bis ④ gleich. In den Manometerröhren wird an der jeweiligen Anschlussstelle der statische Druck p_s angezeigt. Die Differenz zwischen der Flüssigkeitshöhe in der Manometerröhre und der Flüssigkeitshöhe im Behälter entspricht dem dynamischen Druck $(\rho / 2) w^2$.

Der Behälter auf der linken Seite des Bildes 59 ist so groß, dass während des Messvorgangs ein Absenken des Flüssigkeitsspiegels nicht bemerkbar ist. Der Flüssigkeitsspiegel im Behälter hat eine Höhe h_0 von 12 m über der Bezugsebene. Die Flüssigkeit ist Wasser mit der Dichte $\rho = 1000 \text{ kg / m}^3$. Die Höhe h_1 liegt 8 m oberhalb der Bezugsebene, die Höhe h_2 liegt 4,5 m oberhalb der Bezugsebene. Die Querschnittsfläche an der Stelle ① ist genau so groß wie an den Stellen ② und ③ und beträgt $A_1 = 0,03 \text{ m}^2$. Der statische Druck p_3 , der in der Manometersäule ③ angezeigt wird, beträgt $p_3 = 103 990 \text{ Pa}$. Die Querschnittsfläche an der Stelle ④ beträgt $A_4 = 0,07 \text{ m}^2$. Die Höhe h_4 befindet sich 5 m über der Bezugsebene. In der zugehörigen Manometersäule wird ein statischer Druck von $p_4 = 67 950 \text{ Pa}$ angezeigt.

Frage a) Wie hoch sind die Geschwindigkeiten w_1 bis w_4 ?

Da die Flüssigkeit im Behälter als bewegungslos angesehen werden kann, wirkt vom Flüssigkeitsspiegel im Behälter lediglich der Anteil $\rho \cdot g \cdot h_0$ als „treibender“ Druck auf das Leitungssystem.

$$\rho \cdot g \cdot h_0 = (\rho / 2) \cdot w_4^2 + p_4 + \rho \cdot g \cdot h_4$$
$$w_4 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_0 - h_4) - 2 \cdot p_4 / \rho} \quad (62)$$

Setzt man die oben angegebenen Werte ein, ergibt für w_4

$$\underline{w_4 = 1,2 \text{ m / s.}}$$

Entsprechend der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$w_1 \cdot A_1 = w_4 \cdot A_4$$

$$w_1 = w_4 \cdot (A_4 / A_1)$$

Setzt man die oben angegebenen Werte ein, ergibt für w_1

$$\underline{w_1 = 2,8 \text{ m / s.}}$$

Wegen $A_1 = A_2 = A_3$ ergibt

$$\underline{w_2 = w_3 = 2,8 \text{ m / s.}}$$

Frage b) Wie hoch ist der statische Druck p_1 ?

Die Bernoulli-Gleichung (62) gilt in gleicher Weise für die Stelle ① wie für die Stelle ④

$$\rho \cdot g \cdot h_0 = (\rho / 2) \cdot w_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1$$

oder nach p_1 aufgelöst

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot (h_0 - h_1) - (\rho / 2) \cdot w_1^2$$

Setzt man die oben angegebenen Werte ein, ergibt für p_1

$$\underline{p_1 = 35\,320 \text{ Pa.}}$$

Frage c) Wie hoch ist der statische Druck p_2 ?

An den Stellen ① und ② gilt die Bernoulli-Gleichung

$$(\rho / 2) \cdot w_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 = (\rho / 2) \cdot w_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1.$$

Unter Berücksichtigung, dass $(\rho / 2) w_2^2 = (\rho / 2) w_1^2$ und nach p_2 aufgelöst ergibt

$$p_2 = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + p_1$$

Setzt man die oben angegebenen Werte ein, ergibt für p_2

$$\underline{p_2 = 69\,655 \text{ Pa.}}$$

Frage d) Welchen Wert hat die Höhe h_3 ?

Es gilt die Bernoulli-Gleichung

$$\rho \cdot g \cdot h_0 = (\rho / 2) \cdot w_3^2 + p_3 + \rho \cdot g \cdot h_3$$

oder nach h_3 aufgelöst

$$h_3 = h_0 - p_3 / (\rho \cdot g) - w_3^2 / (2 \cdot g)$$

Setzt man die oben angegebenen Werte ein, ergibt für h_3

$$\underline{h_3 = 1,0 \text{ m.}}$$

Frage e) Wie hoch wären die Flüssigkeitsstände in den vier Manometersäulen, wenn stromabwärts der Stelle ④ ein Absperrventil geschlossen würde und somit keine Strömung mehr in der Leitung vorhanden wäre ($w = 0$)?

In diesem Fall wären die Flüssigkeitsstände in den vier Manometersäulen gleich hoch wie im Behälter. Dabei gilt das Prinzip der „kommunizierenden Röhren“.

3.7.2 Druckmessung in einem Wetterkanal

In einem Wetterkanal ist die in Bild 60 dargestellte Messanordnung gegeben.

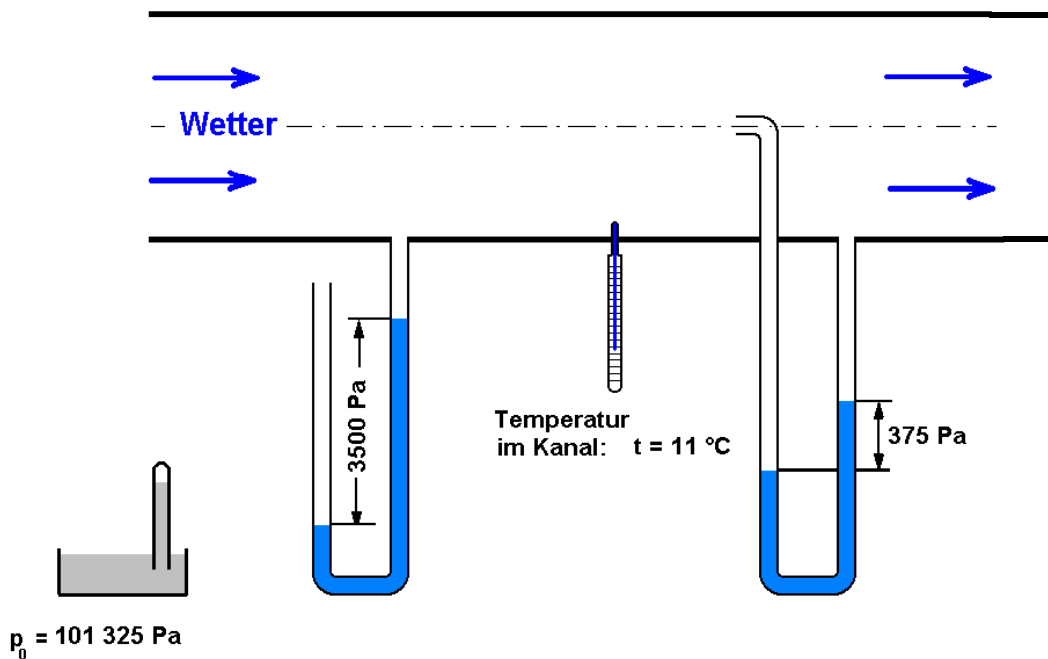


Bild 60: Druckmessung in einem Wetterkanal

Frage a) Welche Drücke werden gemessen?

An der linken Messstelle wird Δp_s gemessen, das ist die Differenz zwischen dem statischen Druck im Wetterkanal und dem Umgebungsdruck in der freien Atmosphäre.

An der rechten Messstelle wird p_d gemessen, das ist der Staudruck (oder auch dynamischer Druck genannt) der Strömung im Wetterkanal.

Frage b) Handelt es sich um eine Messung auf der Saugseite oder auf der Druckseite des Ventilators?

Es handelt sich um eine Messung auf der Saugseite des Ventilators, da der Umgebungsdruck in der freien Atmosphäre höher ist als der statische Druck im Wetterkanal und deshalb $\Delta p_s = p_0 - p_s$ angezeigt wird.

Frage c) Wie hoch ist die Wettergeschwindigkeit im Wetterkanal?

Der statische Druck im Wetterkanal beträgt

$$p_s = p_0 - \Delta p_s$$

$$\underline{p_s = 101\,325\text{ Pa} - 3\,500\text{ Pa} = 97\,825\text{ Pa}}$$

Die Temperatur im Wetterkanal beträgt

$$t = 11\text{ °C} \text{ oder } \underline{T = (273,15 + 11)\text{ K} = 284,15\text{ K}}$$

Mit der Gaskonstanten für trockene Luft $R = 287,14\text{ J / (kg K)}$ errechnet sich die Dichte der Wetter im Kanal mit $\rho = p_s / (R \cdot T)$:

$$\underline{\rho = 97\,825\text{ Pa} / (287,14\text{ J / (kg / K)} \cdot 284,15\text{ K}) = 1,199\text{ kg / m}^3}$$

Der dynamische Druck ist definiert mit $p_d = \rho \cdot w^2 / 2$. Nach der Strömungsgeschwindigkeit aufgelöst wird daraus:

$$w = \sqrt{2 \cdot p_d / \rho}$$

$$\underline{w = \sqrt{2 \cdot 375\text{ Pa} / 1,199\text{ kg / m}^3} = 25,01\text{ m / s}}$$

Frage d) Wie hoch ist der Gesamtdruck im Wetterkanal?

Der Gesamtdruck ist definiert mit $p_t = p_s + p_d$.

$$\underline{p_t = 97\,825\text{ Pa} + 375\text{ Pa} = 98\,200\text{ Pa}}$$

3.8 Viskosität

Ein Fluid ist ein Stoff, der einer scherenden Beanspruchung unbegrenzt nachgibt. Fluide verformen sich also unbegrenzt, wenn Schubspannungen auf sie wirken. Feste Körper lassen sich dagegen nur begrenzt verformen, wenn Schubspannungen auf sie wirken. Zur Veranschaulichung dient Bild 61. Ein Fluid befindet sich zwischen einer festen Grundplatte und einer im Abstand h dazu parallelen Platte, die mit der Geschwindigkeit w bewegt wird (Couette-Strömung). Bei einer Kontaktfläche A ist die Tangentialkraft oder Schubkraft F erforderlich, um die obere Platte zu bewegen. Die Schubkraft F wird vom Fluid auf die feste Grundplatte übertragen und steht mit der dort angreifenden gleich großen Reaktionskraft im Gleichgewicht. In einem Fluid ist die Schubspannung τ das Verhältnis zwischen der Schubkraft F und der Kontaktfläche A , an der die Schubkraft angreift. Die Einheit der Schubspannung ist $\text{N / m}^2 = \text{Pa}$.

$$\tau = F / A \tag{63}$$

In Strömungen haftet das Fluid in einer dünnen Schicht an der Wand. Die Haftschrift an der bewegten Platte nimmt deren Geschwindigkeit w an, während die Haftschrift an der festen Grundplatte die Geschwindigkeit Null behält. Daher stellt sich zwischen den beiden Platten eine Geschwindigkeitsverteilung $w(y)$ ein, die in dem betrachteten Fall linear ist. Daher gilt für den Geschwindigkeitsgradienten

$$\frac{dw}{dy} = \frac{w}{h} \tag{64}$$

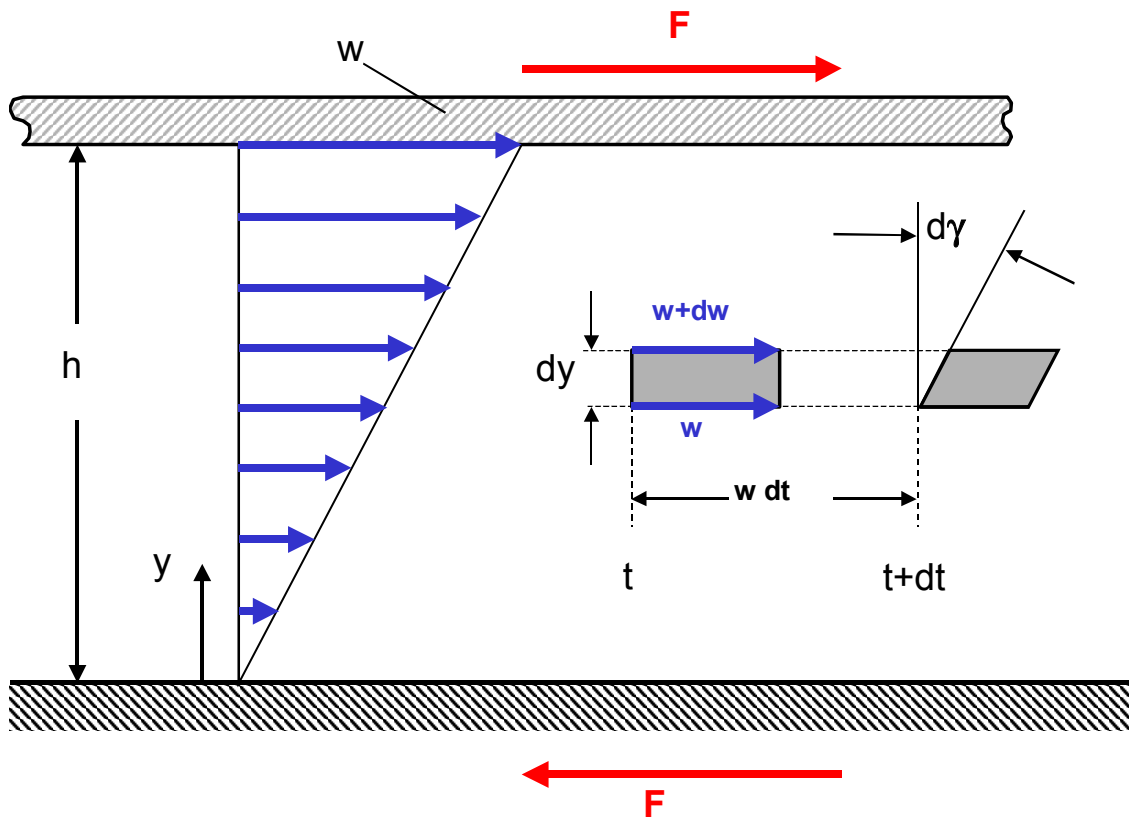


Bild 61: Couette-Strömung

Im Beispiel (Bild 61) wird aus der Strömung ein Fluidelement betrachtet. Dieses Element hat zur Zeit t die Form eines Quaders mit der Höhe dy . Die Oberkante des Fluidelementes ist jedoch einer größeren Geschwindigkeit ausgesetzt als die Unterkante. Dadurch hat sich der Quader nach der Zeit $t + dt$ zu einem Parallelepipet verformt. Zur Zeit $t + dt$ ist der Scherwinkel $d\gamma$

$$d\gamma = \frac{(w + dw) dt - w dt}{dy} = \frac{dw}{dy} dt \quad (65)$$

oder

$$d\gamma / dt = \dot{\gamma} = dw / dy \quad (66)$$

Die Scherwinkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ ist gleich dem Geschwindigkeitsgradienten dw / dy .

Der Zusammenhang zwischen Scherwinkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ (bzw. Geschwindigkeitsgradient dw / dy) einerseits und Schubspannung τ andererseits ist im Bild 62 dargestellt. Man nennt die Beziehung

$$\tau = f(\dot{\gamma}) = f(dw / dy) \quad (67)$$

das „Reibungsgesetz der Fluide“.

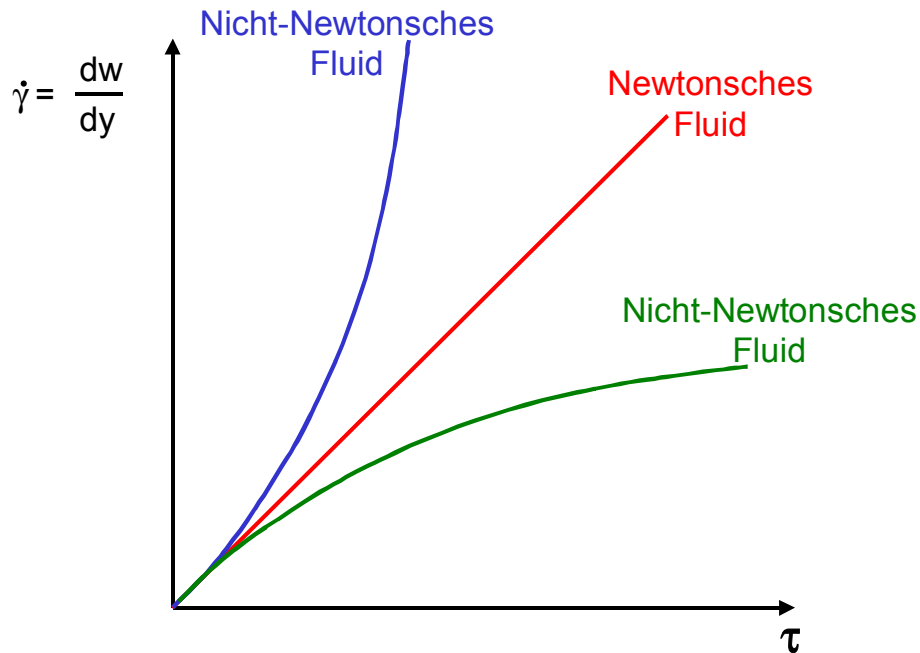


Bild 62: Reibungsgesetz der Fluide

Fluide mit linearem Reibungsgesetz heißen „**Newton'sche Fluide**“, im anderen Fall „**Nicht – Newton'sche Fluide**“. Ein Newton'sches Fluid wird nach Newton durch folgenden Ansatz erfasst:

$$\tau = \eta \cdot (dw / dy) \tag{68}$$

Der Koeffizient η ist die „**dynamische Viskosität**“. Die Einheit hierfür ist

$$\text{kg} / (\text{m s}) = \text{N s} / \text{m}^2$$

{Als veraltete und nicht gesetzliche Einheit für die dynamische Viskosität findet man zuweilen noch „Poise“ (*Jean-Louis Poiseuille, französischer Mediziner, 1799 – 1869; arbeitete besonders über die Physiologie der Blutströmung und formulierte 1848 das nach ihm benannte (von G. Hagen 1839 entdeckte) Poiseuille'sche Strömungsgesetz, wonach die Blutgefäßweite von entscheidendem Einfluss auf den dem strömenden Blut entgegenwirkenden Widerstand ist*) (abgekürzt **P**): **1 P = 0,1 N s / m²**}

Gemäß dem Ansatz von Newton ist die dynamische Viskosität für Newton'sche Fluide

- eine von Temperatur und Druck abhängige Stoffkonstante;
- sei fällt bei Flüssigkeiten mit zunehmender Temperatur;
- sie steigt bei Gasen mit zunehmender Temperatur;
- die Änderung mit dem Druck ist bei Flüssigkeiten vernachlässigbar;
- bei Gasen ist die Änderung mit dem Druck bei großer Drucksteigerung nicht zu vernachlässigen.

Die „**kinematische Viskosität**“ ν ergibt sich aus der dynamischen Viskosität durch Division mit der Dichte ρ des strömenden Fluids:

$$\nu = \eta / \rho \tag{69}$$

Die Einheit für die kinematische Viskosität ist m^2 / s

{Als veraltete und nicht gesetzliche Einheit für die kinematische Viskosität findet man zuweilen noch „Stokes“ (*George Gabriel Stokes, Sir (seit 1889), britischer*

Mathematiker und Physiker, 1819 – 1903; fand das Stokes'sche Reibungsgesetz von Strömungen) (abgekürzt **St**): $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$

Alle Gase und zahlreiche Flüssigkeiten (z. B. Wasser) sind Newtonsche Fluide. Zahlenwerte für η und ν für Luft und Wasser sind der Tabelle 4 zu entnehmen:

	dynamische Viskosität η [kg / (m s)]	kinematische Viskosität ν [m ² / s]
Wasser	10^{-3}	10^{-6}
Luft	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 4: Dynamische und kinematische Viskosität für Luft und Wasser
(Näherungswerte bei $t = 20^\circ\text{C}$ und $p = 10^5 \text{ Pa}$)

Zur Messung der Viskosität wird ein Couette-Viskosimeter benutzt. Dabei handelt es sich um zwei konzentrische Zylinder, von denen ein Zylinder rotiert. Bei Vernachlässigung der Zylinderkrümmung bildet sich in dem schmalen Spalt zwischen den Zylindern eine Couette-Strömung entsprechend Bild 61 aus. Aus dem Drehmoment lässt sich die Schubspannung und daraus die Viskosität ermitteln.

Die Viskosität ist ein Maß für die Fähigkeit eines Fluids, Schubkräfte zu übertragen. Die Schubkräfte entsprechen dem Impulstransport quer zur Strömungsrichtung. Zwischen benachbarten Schichten mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten im Fluid kommt es zu einem Austausch von Fluidpartikeln mit unterschiedlichem Impuls (Impuls = Masse mal Geschwindigkeit). Der Impulsfluss geschieht von Gebieten höherer Geschwindigkeit zu Gebieten mit niedrigerer Geschwindigkeit. Daher ist die Viskosität auch ein Maß für die Fähigkeit eines Fluids, Impuls zu übertragen. Die Viskosität ist somit eine Transporteigenschaft eines Fluids.

3.9 Grundsätzliche Strömungserscheinungen

Der englische Physiker Reynolds (*Osborne Reynolds, englischer Physiker; 1868-1905 Professor in Manchester, 1842 – 1912*) hat 1883 seinen berühmten Farbfadenversuch in einer



laminare Strömung



turbulente Strömung

Bild 63: Vergleich zwischen laminarer und turbulenter Strömung

Rohrströmung durchgeführt. Dabei führte er einer Wasserströmung durch ein feines Röhrchen farbige Flüssigkeit zu. Es bildet sich ein dünner Farbfaden, der bei einer durchsichtigen Rohrwand in seiner Entwicklung beobachtet werden kann. Bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten bildet sich ein nahezu gradliniger Farbfaden aus, der sich parallel zur Rohrachse mit der Strömung bewegt (Bild 63 oben). Es liegt also eine Schichtenströmung ohne starken Austausch von Fluidteilchen quer zur Strömungsrichtung vor. Hierbei spricht man von einer laminaren Strömung.

Sobald die Strömungsgeschwindigkeit im Rohr allerdings einen kritischen Wert überschreitet, ändert sich das Strömungsbild jedoch gravierend. Wie aus dem Bild 63 unten zu ersehen ist, wird der Farbfaden starken und unregelmäßigen Querbewegungen unterzogen. Der Farbfaden löst sich bald vollständig auf. Hierbei spricht man von einer turbulenten Strömung. Eine turbulente Strömung ist dadurch gekennzeichnet, dass eine starke, ungleichmäßige und zufällige Schwankungsbewegung in allen Richtungen stattfindet. Diese Schwankungsbewegung überlagert die homogene Grundströmung und ist für die ausgeprägte Vermischung des Farbfadens im Rohr verantwortlich.

Im Abschnitt 3.8 wurde bereits die Haftbedingung erwähnt, nach der die Geschwindigkeit an der fest stehenden Rohrwand Null werden muss. Daher gibt es in einer Rohrströmung keine konstante Geschwindigkeit, sondern eine Geschwindigkeitsverteilung wie in Bild 63 dargestellt. Für laminare und turbulente Strömungen sind die Geschwindigkeitsverteilungen unterschiedlich. In turbulenten Strömungen ist die Geschwindigkeitsverteilung aufgrund der Schwankungsbewegung sowie der damit verbundenen Vermischung quer zur Haupt-Strömungsrichtung weitgehend egalisiert. Lediglich in den schmalen Randzonen geht die ansonsten nahezu konstante Geschwindigkeitsverteilung gegen Null. Das Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Strömung ist völliger als das einer laminaren Strömung. Die Maximalgeschwindigkeit auf der Längsachse ist bei einer turbulenter Strömung höchstens 25 % größer als die mittlere Geschwindigkeit, während der Wert bei laminarer Geschwindigkeit bei 100 % liegt.

3.10 Reynolds-Zahl

Der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung hängt nicht nur von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit \bar{w} ab, sondern auch vom Rohrdurchmesser d , von der Dichte ρ , sowie von der Viskosität η . Darüber hinaus hängt dieser Übergang nicht nur von den vier Größen \bar{w} , d , ρ und η speziell ab, sondern von einer mit diesen Größen gebildeten dimensionslosen Kennzahl.

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot \bar{w} \cdot d}{\eta} = \frac{\bar{w} \cdot d}{\nu} \quad (70)$$

Diese dimensionslose Kennzahl wird „Reynolds-Zahl“ genannt. Die Reynolds-Zahl ist eine Kennzahl der Ähnlichkeitsmechanik. Strömungen, deren dimensionslose Kennzahlen trotz unterschiedlicher geometrischer und physikalischer Größen gleiche Zahlenwerte liefern, heißen „mechanisch ähnlich“. Im Sinne der Ähnlichkeitsmechanik können mechanisch ähnliche Strömungen an einem geometrisch ähnlich verkleinerten beziehungsweise vergrößerten Modell untersucht werden, solange die Strömungen am Modell und am Original mechanisch ähnlich sind, das heißt gleiche Reynolds-Zahlen aufweisen. Für alle Strömungen, für die von den vier Größen Dichte, Geschwindigkeit, Länge und Viskosität abhängen, ist die Reynolds-Zahl die charakteristische Kennzahl.

Der Wechsel von laminarer zu turbulenter Strömungsform in einer Rohrströmung erfolgt bei einer „kritischen Reynolds-Zahl“. Bei der Rohrströmung beträgt die „kritischen Reynolds-Zahl“ $\text{Re}_k = 2300$. Das heißt

für $Re < Re_k$ ist die Strömung laminar,
für $Re > Re_k$ ist die Strömung turbulent.

Zur Untersuchung von rechnerisch nicht erfassbarem Strömungsverhalten (z. B. zur Bestimmung von Kenn- und Beiwerten) werden Versuche in Strömungskanälen vorgenommen. Bei großvolumigen oder auch bei extrem kleinen Versuchskörpern bedient man sich des Modellverfahrens. Das bedeutet, dass der zu untersuchende Modellkörper in verkleinertem beziehungsweise in vergrößertem Maßstab erstellt wird. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass Kosten oder auch Raum gespart werden können. Damit aus den Ergebnissen des Modellversuchs Schlüsse auf das Verhalten der Originalausführung gezogen werden können, müssen Modellströmung und Originalströmung einander ähnlich sein, das heißt sie müssen der gleichen Reynolds-Zahl entsprechen.

Im folgenden Beispiel will man die Strömung in einem Streb mit Schildausbau untersuchen. Die gebaute Mächtigkeit im Streb beträgt 1,5 m. Es herrscht eine mittlere Wettergeschwindigkeit im Streb von $w = 3,0 \text{ m/s}$. Dazu soll ein geometrisch ähnliches Modell verwendet werden mit einer der gebauten Mächtigkeit entsprechenden Höhe von 0,1 m. Anstelle des strömenden Fluids „Wetter“ ($\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) soll das Modell mit Wasser als strömendes Fluid ($\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) betrieben werden. Die Reynolds-Zahl der Originalströmung beträgt:

$$Re = (3,0 \text{ m/s} \cdot 1,5 \text{ m}) / 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 0,3 \cdot 10^6$$

Damit der Modellversuch die gleiche Reynolds-Zahl wie im Original aufweist, muss die Strömungsgeschwindigkeit im Modellversuch aufgrund der vorgegebenen Werte folgendermaßen sein:

$$Re = 0,3 \cdot 10^6 = (? \text{ m/s} \cdot 0,1 \text{ m}) / 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit im Wasser-Modell muss demnach ebenfalls 3 m/s betragen, um die gleiche Reynolds-Zahl zu erhalten. Die Strömungen im Original und im Modell sind dann einander ähnlich.

3.11 Strömung mit Druckverlusten

Im Gegensatz zur idealisierten Strömung treten in realen Strömungen Druckverluste auf. Durch Reibung nimmt somit der Gesamtdruck p_t in Strömungsrichtung bei $h = \text{const}$ ab. Die Erfahrung lehrt, dass der spezifische Druckverlust p_v proportional zum spezifischen dynamischen Druck $w^2 \cdot (\rho / 2)$ ist.

3.11.1 Formwiderstand

Druckverlust durch Formwiderstand kann unterschiedliche Gründe haben; hierzu gehören z. B. Umlenkungen, Abzweigungen, Verengungen, Erweiterungen, Drosselungen, Kühler, und Entstauber. Die dimensionslose Widerstandszahl ζ ist in den meisten technischen Anordnungen eine Konstante. Widerstandszahlen werden überwiegend experimentell bestimmt. Einige Beispiele hierzu sind in Bild 64 angegeben.

Die Widerstandszahl ist definiert durch

$$p_v = \zeta \cdot w^2 \cdot \rho / 2 \quad (71)$$

Bei Bauelementen, in denen sich die Strömungsgeschwindigkeit ändert – wie z. B. in einem Diffusor oder in einer Verengung – muss zur eindeutigen Definition der entsprechenden Widerstandszahl ζ angegeben werden, auf welche Geschwindigkeit sich der Wert bezieht. In der Regel ist die Widerstandszahl auf die Anströmgeschwindigkeit bezogen.

Ein Leitungssystem kann aus einer Vielzahl von Einzelwiderständen bestehen. Es gilt dann

$$p_{v\text{ ges}} = p_{v1} + p_{v2} + p_{v3} + \dots = \sum_i p_{vi} \quad (72)$$

mit

$$p_{vi} = \zeta_i \cdot w_i^2 \cdot \rho / 2 \quad (73)$$

<input type="radio"/> $R/D = 0,5$ $0,8$ 1 $1,5$ 2 3 4		<input type="radio"/> $h/b = 0,3$ $0,5$ 1 2		<input type="radio"/> $\zeta = 0,9$		<input type="radio"/> $\zeta = 0,6$	
<input type="checkbox"/> $\zeta = 0,90$ $0,43$ $0,33$ $0,24$ $0,19$ $0,17$ $0,15$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 2,1$ $1,7$ $1,2$ $0,6$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 1,25$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 0,7$	
<input type="radio"/> $R/D = 0,5$ $0,8$ 1 $1,5$ 2		<input type="radio"/> $R/W = 0$ $0,2$ $0,4$ $0,6$ $0,8$		<input type="radio"/> $R/D = 0,25$ $0,50$ $0,75$ $1,00$		<input type="radio"/> $\alpha = 15^\circ$ 30° 45° 60°	
<input type="checkbox"/> 8 Segmente $\zeta = 1,30$ $0,80$ $0,50$ $0,30$ $0,25$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 1,4$ $0,7$ $0,6$ $0,7$ $1,1$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 0,20$ $0,10$ $0,05$ $0,05$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 0,50$ $0,30$ $0,30$ $0,40$	
<input type="checkbox"/> 6 Segmente $\zeta = 1,10$ $0,60$ $0,40$ $0,25$ $0,20$							
<input type="checkbox"/> $R/W = 0,5$ $0,75$ 1 2		<input type="checkbox"/> $\zeta = 0,40$ $0,25$ $0,20$ $0,10$		<input type="checkbox"/> $F_2/F_1 = 0$ $0,2$ $0,4$ $0,6$ $0,8$ $1,0$			
<input type="checkbox"/> $W_1/W = 0,25$ $\zeta = 0,50$ $0,30$ $0,20$ $0,10$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 0,35$ $\zeta = 0,1$		<input type="checkbox"/> $\zeta_2 = 0,6$ $0,45$ $0,30$ $0,20$ $0,10$ $0,00$		<input type="checkbox"/> $\zeta_2 = 0,1$	
<input type="checkbox"/> $W_1/W = 0,5$ $\zeta = 0,50$ $0,30$ $0,20$ $0,10$							
<input type="radio"/> $R/D = 0,5$ $0,8$ $1,0$ $1,5$ $2,0$		<input type="radio"/> $\alpha = 10^\circ$ 30° 45° 60° 90°		<input type="checkbox"/> $\zeta = 1,4$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 1,4$	
<input type="checkbox"/> $\zeta = 1,30$ $0,90$ $0,80$ $0,60$ $0,50$		<input type="checkbox"/> $\zeta = 0,1$ $0,3$ $0,70$ $1,00$ $1,40$					

Auszug aus: Taschenbuch für Heizung und Klimatechnik Recknagel-Sprenger, 58. Ausgabe

Bild 64: Widerstandszahlen

3.11.2 Carnotscher Stoßverlust

Im Zusammenhang mit einer Strömung durch ein zylindrisches Rohr, bei dem sich die Querschnittsfläche sprunghaft vom A_1 auf A_2 erweitert, spricht man von einem Carnotschen Stoßverlust (Nicolas Léonard Sadi Carnot, französischer Physiker, 1796 – 1832; Beiträge zur Wärmelehre, Carnotscher Kreisprozess). Das Fluid strömt mit der Geschwindigkeit w_1 und dem statischen Druck p_1 im engen Rohr. Anschließend strömt das Fluid mit der Geschwindigkeit w_1 in Form eines Strahls in das weite Rohr ein. Seitlich vom Strahl ruht das Fluid. Daher herrscht dort derselbe Druck p_1 wie im Strahl. Stromabwärts vermischt sich der Strahl allmählich mit dem umgebenden Fluid, bis sich schließlich eine gleichmäßige Geschwindigkeit w_2 über dem gesamten erweiterten Querschnitt A_2 ergibt (siehe Bild 65). Nach der Kontinuitätsgleichung gilt $w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2$.

Bei kreisrunden Rohren hat nach einer Entfernung von $5 \cdot d_2$ bis $10 \cdot d_2$ von der Stelle der sprunghaften Erweiterung praktisch eine vollständige Vermischung stattgefunden. Dies geschieht dadurch, weil im Fluid Schubspannungen auftreten oder – anders gesagt – weil innere Reibung vorhanden ist. Man darf jedoch den Druckunterschied $p_2 - p_1$ nicht einfach aus der Bernoulli-Gleichung berechnen, da nämlich bei der Vermischung des Strahls ein Teil der mechanischen Energie durch innere Reibung in Wärme übergeht. Der Carnotsche

Stoßverlust p_{vc} , der bei einer sprunghaften Erweiterung auftritt, lässt sich nach folgender Beziehung berechnen:

$$p_{vc} = \rho / 2 \cdot (w_1 - w_2)^2 = w_1^2 \cdot \rho / 2 \cdot (1 - A_1 / A_2)^2 \quad (75)$$

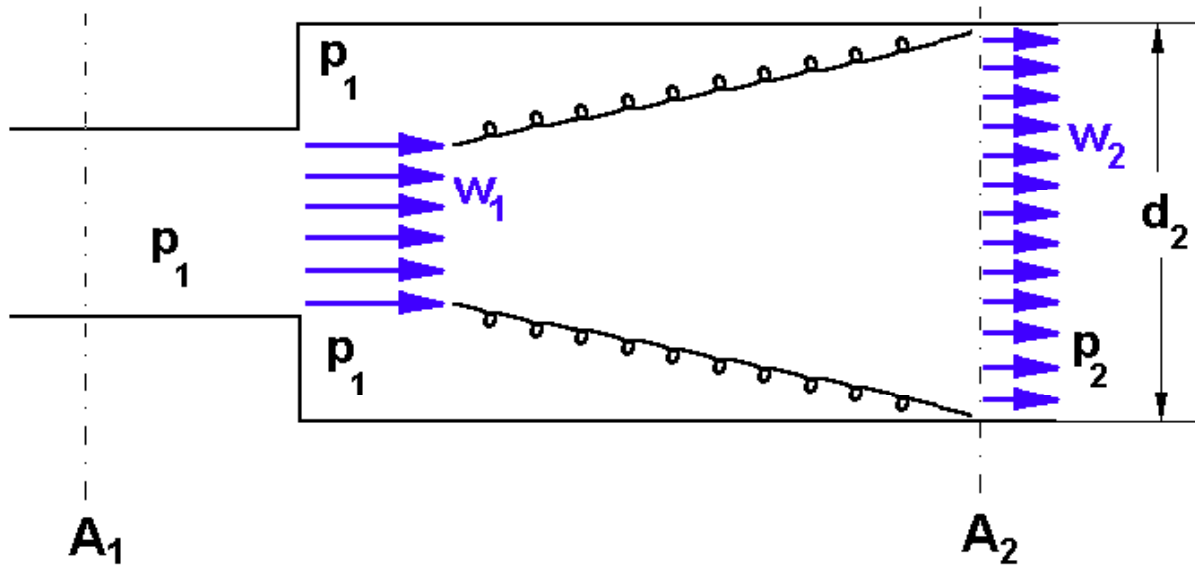


Bild 65: Carnotscher Stoßverlust

Die Widerstandszahlen ζ für den Carnotschen Stoßverlust sind dem Bild 66 zu entnehmen. Sie entsprechen dem Ausdruck $\zeta = (1 - A_1 / A_2)^2$.

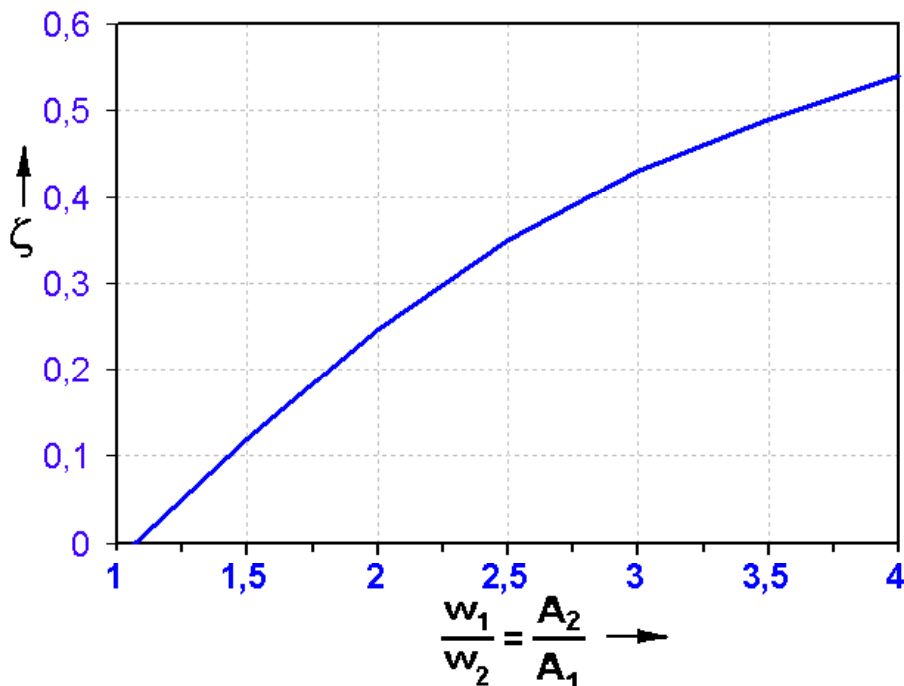


Bild 66: Widerstandszahlen für den Carnotschen Stoßverlust

3.11.3 Diffusor

Den Druckunterschied $p_2 - p_1$ entsprechend der Bernoulli-Gleichung erhält man annähernd in einem stetig vom Querschnitt A_1 auf den Querschnitt A_2 erweiterten Rohr, einem sogenannten Diffusor (siehe Bild 67 oben). Die Aufgabe eines Diffusors ist es, durch Verzögerung der Strömung dynamischen Druck in statischen Druck umzuwandeln. Wenn der Öffnungswinkel eines Diffusors hinreichend klein ist ($\alpha \approx 6^\circ$ bis 10°), löst die Strömung nicht von der Wand ab und es tritt somit kein Strahl mit anschließender Vermischung auf. Jedoch kommen auch ohne Strahlablösung Strömungsverluste vor, die von der Reibung herrühren. Daher haben auch Diffusoren Widerstandszahlen in der Größenordnung von $\zeta \approx 0,1$ bis $0,25$. Bei größeren Öffnungswinkeln verliert die Strömung ihre Haftung an der Diffusorwand und die Grenzschicht löst sich ab (Bild 67 unten). Es treten dabei Verwirbelungen auf, die zu großen Druckverlusten führen. Bei einer Querschnittserweiterung mit Vervielfachung des Querschnitts ($A_2 / A_1 = 4$) beträgt beispielsweise bei einem Öffnungswinkel von 20° die Widerstandszahl $\zeta \approx 0,49$, während bei einem Öffnungswinkel von 30° die Widerstandszahl bereits einen Wert $\zeta \approx 0,55$ hat.

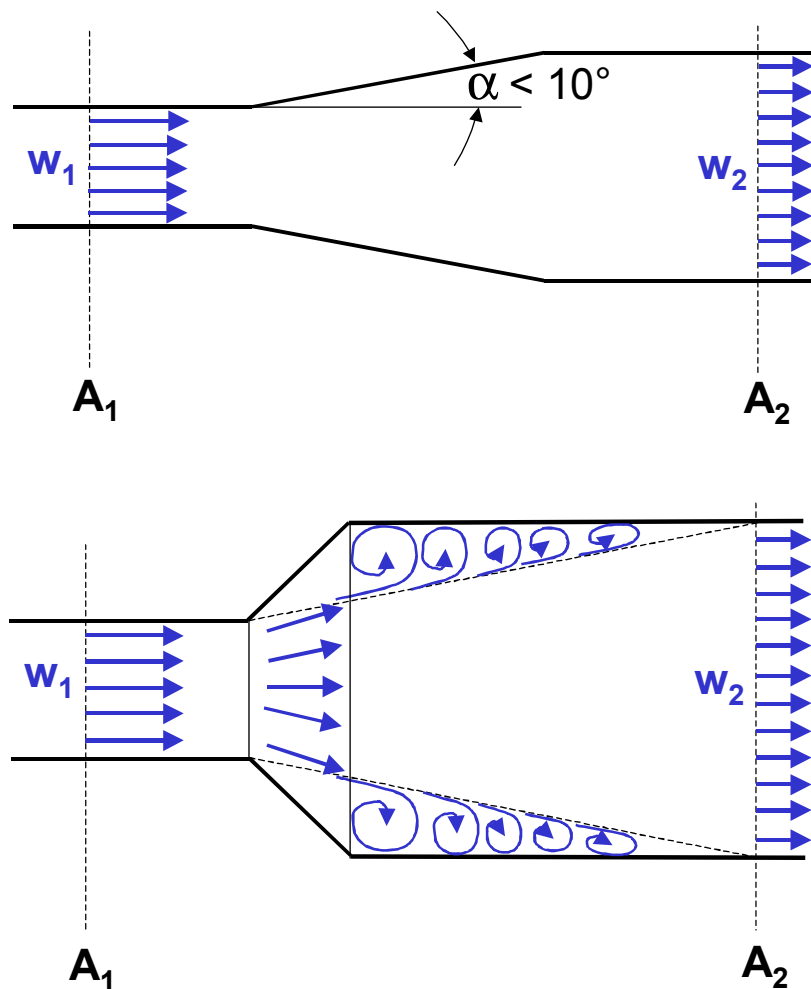


Bild 67: Diffusor

3.11.4 Reibungswiderstand

Betrachtet man ein Rohrstück mit der Länge L und dem Umfang U , das nicht unbedingt einen kreisrunden Querschnitt haben muss, dann wirkt an der Wand die Reibungskraft F_R :

$$F_R = \tau_w \cdot U \cdot L \quad (76)$$

Die Wandschubspannung τ_w wird dabei über den Umfang als konstant angenommen. Durch Division mit der Querschnittsfläche A erhält man den Druckverlust durch Reibung p_V .

$$p_V = F_R / A = \tau_w \cdot U \cdot L / A \quad (77)$$

Aus Gleichung (71) folgt:

$$\zeta = \frac{2 \cdot p_V}{w^2 \cdot \rho} = \frac{2 \cdot \tau_w \cdot U \cdot L}{w^2 \cdot \rho \cdot A} \quad (78)$$

Man definiert den "hydraulischen Durchmesser" mit

$$d_h = 4 \cdot A / U \quad (79)$$

Darin ist U der vom Fluid „benetzte“ Umfang und A die Fläche des vom Fluid ausgefüllten Querschnitts. Für den Kreisquerschnitt ist der hydraulische Durchmesser gleich dem Kreisdurchmesser. Gleichung (78) lautet damit:

$$\zeta = \frac{8 \cdot \tau_w \cdot L}{\rho \cdot w^2 \cdot d_h} \quad (80)$$

Der Faktor $8 \cdot \tau_w / (\rho \cdot w^2)$ ist in guter Näherung konstant und wird mit dem Buchstaben λ bezeichnet. Die Rohrreibungszahl λ ist definiert durch

$$p_V = \lambda \cdot \frac{L}{d_h} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \quad (81)$$

Bei der Rohrreibung ist also die Widerstandszahl proportional zur Rohrlänge L und umgekehrt proportional zum hydraulischen Durchmesser d_h .

$$\zeta = \lambda \cdot L / d_h \quad (82)$$

3.12 Rohrströmung

Als Maß für den Druckverlust in der Rohrströmung ist die Rohrreibungszahl λ eingeführt worden. Bei turbulenter Strömung ist aufgrund der turbulenten Schwankungsbewegung und der starken Vermischung quer zur Strömungsachse mit einem plötzlichen Ansteigen der Rohrreibungszahl λ bei der kritischen Reynolds-Zahl Re_k zu rechnen. Die Abhängigkeit der Rohrreibungszahl λ von der Reynolds-Zahl Re ist im Rohrwiderstandsdiagramm (Bild 68) in doppeltlogarithmischer Auftragung dargestellt.

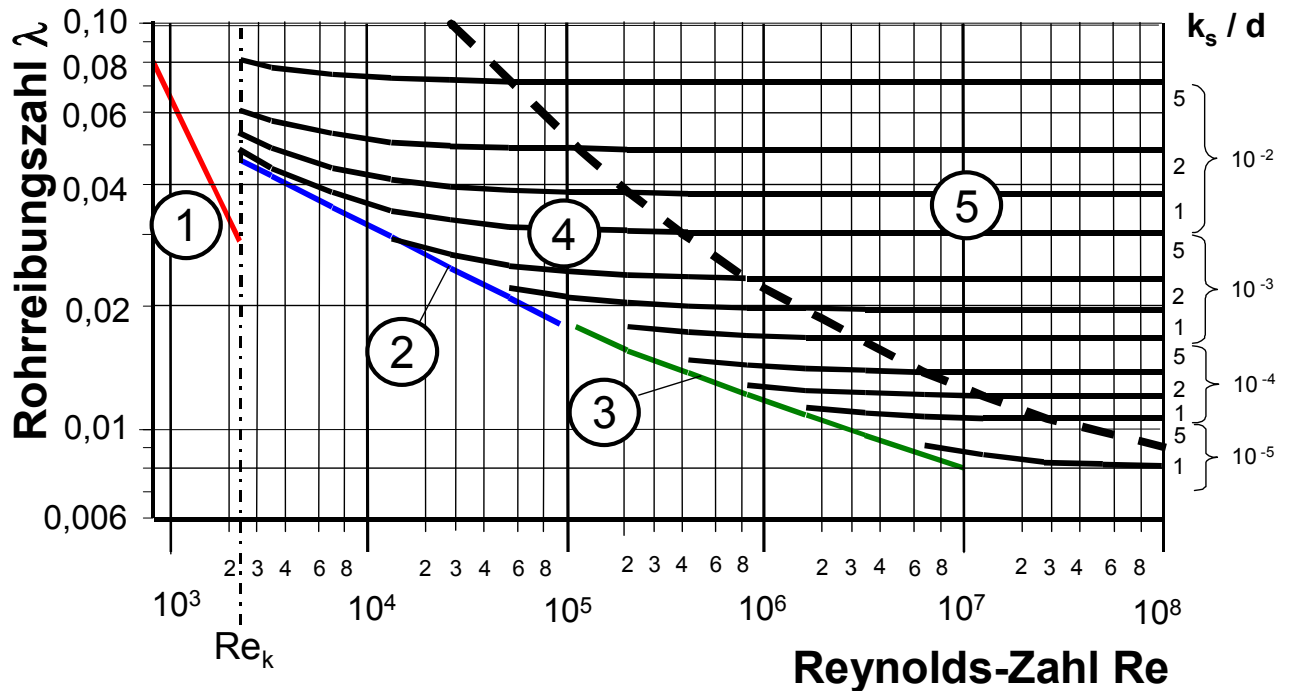


Bild 68: Rohrreibungsdiagramm

Darin ist auch der Einfluss der Wandrauhigkeit enthalten und durch die „Rauigkeitshöhe“ k_s gekennzeichnet. Die Rauigkeitshöhe ist die Höhe unendlich dicht angeordneter gleich großer Sandkörner (Sandrauhigkeit). Im Rohrreibungsdiagramm werden fünf Kurven bzw. Kurvenbereiche unterschieden. Die Kurve ① entspricht der laminaren Rohrströmung für $Re < Re_k$. Die übrigen vier Kurven bzw. Kurvenbereiche entsprechen der turbulenten Rohrströmung für $Re > Re_k$. Dafür sind die Abhängigkeiten der entsprechenden Rohrreibungszahlen λ empirisch oder halbempirisch gefunden worden. Die Kurven ② und ③ gelten, wenn die Rauigkeit keinen Einfluss hat. Obwohl eine Rauigkeit vorhanden sein kann, ist sie im Geltungsbereich der Kurven ② und ③ so gering, dass sie den Rohrwiderstand nicht beeinflusst. In diesem Fall spricht man von einer „hydraulisch glatten“ Wand. Bis etwa $Re = 10^5$ gilt die Kurve ②, während oberhalb von $Re = 10^5$ die Kurve ③ gilt. Wenn die Sandrauhigkeit k_s groß genug wird, um einen Einfluss auf die Rohrreibung zu erlangen, werden wieder zwei Bereiche unterschieden. Im Bereich ④ hängt die Rohrreibungszahl λ sowohl von der Reynolds-Zahl Re als auch von der relativen Sandrauhigkeit k_s / d ab. Dagegen ist im Bereich ⑤ die Rauigkeit bereits so groß, dass sie allein maßgeblich für die Rohrreibung ist. Der Einfluss der Reynolds-Zahl ist hier nicht mehr vorhanden. Bei vorgegebener Rauigkeit ist die Rohrreibungszahl λ eine Konstante. Es besteht ein rein quadratisches Widerstandsgesetz, wie es bei der Definition der Widerstandszahl ζ entsprechend Gleichung (71) zugrunde liegt.

Die im Rohrreibungsdiagramm (Bild 68) dargestellten Kurven beziehungsweise Kurvenbereiche entsprechen den nachfolgend aufgeführten Gleichungen:

- ① Hagen – Poiseulle: $\lambda = 64 / \text{Re}$ *laminar*
- ② Blasius [69]: $\lambda = 0,316 \cdot (\text{Re})^{-1/4}$ } *turbulent hydraulisch glatt*
- ③ Prandtl: $1 / \sqrt{\lambda} = 2 \log (\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}) - 0,8$ }
- ④ Colebrook [70]: $1 / \sqrt{\lambda} = 1,74 - 2 \cdot \log \left[2 \cdot k_s / d + 18,7 / (\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}) \right]$ } *turbulent mit Rauigkeit*
- ⑤ v. Kármán: $1 / \sqrt{\lambda} = 1,74 - 2 \log (2 k_s / d)$

(Theodore von Kármán, US-amerik. Luftfahrtwissenschaftler ungarischer Herkunft; lehrte an der Technischen Hochschule Aachen (1912-1930), siedelte 1930 nach den USA über und wurde dort Leiter des Luftfahrtlaboratoriums der Guggenheim-Stiftung, 1881 – 1963)

Werkstoff	Zustand der Rohre	Rauhigkeitshöhe k_s [mm]
Gezogene Rohre aus Kupfer, Messing, Bronze, Kunststoffen etc.	neu, technisch glatt	0 – 0,0015
Gezogene Stahlrohre	neu, mittel glatt	0,01 – 0,05
Geschweißte Stahlrohre	neu	0,05 – 0,10
	leichte Verkrustungen	0,15 – 0,20
	stärkere Verkrustungen	<3,0
Betonrohre	neu, Stahlbeton mit sorgfältig geglättetem Verputz	0 – 0,15
	neu, Schleuderbeton mit glattem Verputz	≈ 0,15
	neu, ohne Verputz Leitungen aus Stahlbeton mit glattem Verputz, mehrere Jahre in Betrieb	0,20 – 0,80 0,2 – >0,30

Tabelle 5: Rauhigkeitshöhe k_s Auszug aus [73]

Dadurch, dass die Rohrreibungszahlen λ im Bereich ⑤ einander entsprechen, kann jeder technischen Rauhigkeit eine äquivalente Sandrauhigkeit zugeordnet werden. Wenn für ein Rohr mit technischer Rauhigkeit der zugehörige λ - Wert ermittelt worden ist, kann man aus dem Rohr widerstandsdiagramm (Bild 68) den äquivalenten k_s -Wert entnehmen. Der Tabelle 5 können beispielhaft einige Werte für die Rauhigkeitshöhe k_s entnommen werden.

Das Rohr widerstandsdiagramm wurde zunächst für das kreisrunde Rohr erstellt. Die Ergebnisse lassen sich jedoch auch auf Strömungen mit beliebigem Querschnitt und sogar auf offene Gerinne anwenden, wenn anstatt des Kreisdurchmessers der hydraulische Durchmesser d_h entsprechend Gleichung (79) verwendet wird.

3.13 Bernoulli-Gleichung für reale Strömungen

Durch die Einführung der Druckverluste durch Formwiderstand und Reibungswiderstand lässt sich die Bernoulli-Gleichung in Druckform (51) auch für die Anwendung auf reale

Strömungen erweitern. Betrachtet man zwei Stellen einer Strömung, wobei die Stelle ① stromaufwärts von der Stelle ② liegt, dann ergibt die Bernoulli – Gleichung für eine reale Strömung in der Druckform:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot w_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \sum_{i=1}^n \zeta_i \cdot p_{di} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \frac{L_j}{d_j} \cdot p_{dj} \quad (83)$$

Darin sind

$\sum_{i=1}^n \zeta_i \cdot p_{di}$ die Summe aller **n** Formwiderstände zwischen den Stellen ① und ②

$\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \frac{L_j}{d_j} \cdot p_{dj}$ die Summe aller **m** Reibungswiderstände zwischen den Stellen ① und ②

3.14 Übungsaufgabe zum Thema „Bernoulli – Gleichung für reale Strömungen“

Gegeben ist ein ausziehender Wetterschacht, der nur auf der tiefsten Sohle einen Anschlag besitzt. Von der tiefsten Sohle bis zum Wetterkanalabzweig besteht eine Teufendifferenz von 1000 m. Der Schacht hat einen gleichbleibenden Durchmesser von 6 m. Durch den Schacht wird ein Wettervolumenstrom von 200 m³/s gefördert. Die Gestaltung des Wetterkanals sowie sonstige Angaben sind dem Bild 69 zu entnehmen. Der durch die Schachtschleuse tretende Kurzschlusswetterstrom von über Tage ist zu vernachlässigen.

Frage Wie hoch ist der Druckverlust im Schacht und im Wetterkanal?

Die Querschnittsfläche des Schachtes beträgt

$$A_{\text{Sch}} = \pi \cdot d_{\text{Sch}}^2 / 4$$

$$A_{\text{Sch}} = \pi \cdot (6 \text{ m})^2 / 4$$

$$\underline{A_{\text{Sch}} = 28,27 \text{ m}^2}$$

Die mittlere Wettergeschwindigkeit im Schacht beträgt

$$w_{\text{Sch}} = \dot{V} / A_{\text{Sch}}$$

$$w_{\text{Sch}} = 200 \text{ m}^3/\text{s} / A_{\text{Sch}}$$

$$\underline{w_{\text{Sch}} = 7,0735 \text{ m/s}}$$

Der Druckverlust im Schacht durch Reibung beträgt

$$p_{V, \text{Reibung}} = \lambda \cdot \frac{L_{\text{Sch}}}{d_{\text{Sch}}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w_{\text{Sch}}^2$$

$$p_{V, \text{Reibung}} = 0,08 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{6 \text{ m}} \cdot \frac{1,25 \text{ kg/m}^3}{2} \cdot (7,0735 \text{ m/s})^2$$

$$\underline{p_{V, \text{Reibung}} = 416,96 \text{ Pa}}$$

Der Druckverlust durch den Formwiderstand des Wetterkanalanschlusses beträgt

$$p_{V, \text{Form}} = \zeta \cdot w_{\text{Sch}}^2 \cdot \rho / 2$$

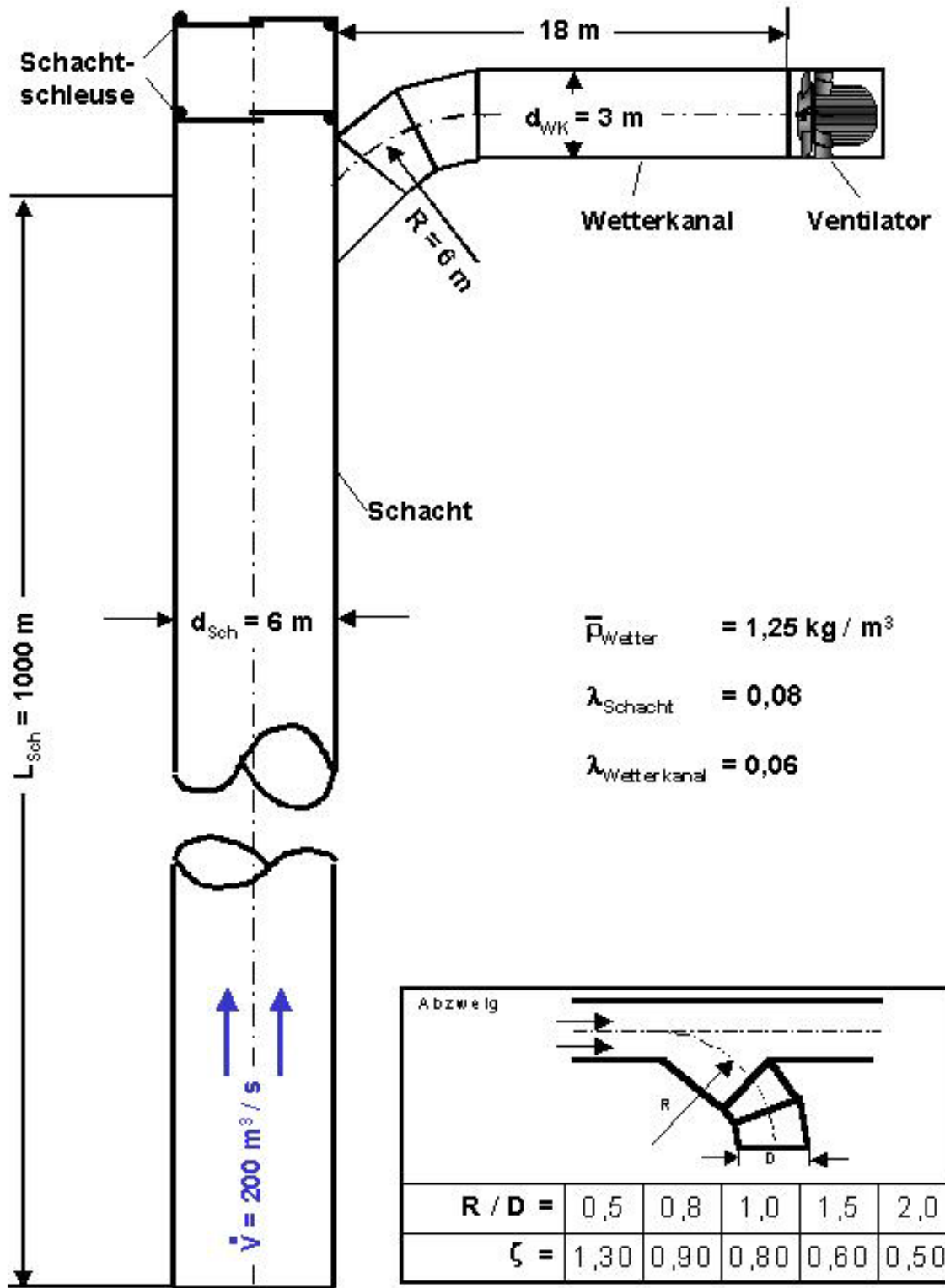


Bild 69: Ausziehender Wetterschacht mit Wetterkanal

Die Widerstandszahl des Wetterkanalanschlusses beträgt entsprechend der im Bild 69 enthaltenen Tabelle (für $R/D = 2,0$) $\zeta = 0,5$.

$$p_{V, \text{Form}} = 0,5 \cdot (7,0735 \text{ m / s})^2 \cdot 1,25 \text{ kg / m}^3 / 2$$

$$p_{V, \text{Form}} = 15,6 \text{ Pa}$$

Nach der Kontinuitätsgleichung verhalten sich die Wettergeschwindigkeiten im Schacht und im Wetterkanal umgekehrt proportional zu ihren Querschnittsflächen

$$w_{\text{Sch}} / w_{\text{WK}} = A_{\text{WK}} / A_{\text{Sch}}$$

Die Querschnittsfläche des Wetterkanals beträgt

$$A_{\text{WK}} = \pi \cdot d_{\text{WK}}^2 / 4$$

$$A_{\text{WK}} = \pi \cdot (3\text{m})^2 / 4$$

$$\underline{A_{\text{WK}} = 7,0686 \text{ m}^2}$$

Die Wettergeschwindigkeit im Wetterkanal beträgt somit

$$w_{\text{WK}} = (A_{\text{Sch}} / A_{\text{WK}}) \cdot w_{\text{Sch}}$$

$$w_{\text{WK}} = 28,27 \text{ m}^2 / 7,0686 \text{ m}^2 \cdot 7,0735 \text{ m / s}$$

$$\underline{w_{\text{WK}} = 28,2899 \text{ m / s}}$$

Der Druckverlust durch Reibung im Wetterkanal beträgt

$$p_{\text{V, Reibung}} = \lambda \frac{L_{\text{WK}}}{d_{\text{WK}}} \cdot \frac{\rho}{2} w_{\text{WK}}^2$$

$$p_{\text{V, Reibung}} = 0,06 \cdot \frac{18 \text{ m}}{3 \text{ m}} \cdot \frac{1,25 \text{ kg / m}^3}{2} \cdot (28,2899 \text{ m / s})^2$$

$$\underline{p_{\text{V, Reibung}} = 180,07 \text{ Pa}}$$

Der gesamte Druckverlust im Schacht und im Wetterkanal beträgt somit

$$p_{\text{V}} = (p_{\text{V, Reibung}})_{\text{Sch}} + (p_{\text{V, Form}})_{\text{WK Anschluss}} + (p_{\text{V, Reibung}})_{\text{WK}}$$

$$p_{\text{V}} = 416,96 \text{ Pa} + 15,6 \text{ Pa} + 180,07 \text{ Pa}$$

$$\underline{p_{\text{V}} = 612,67 \text{ Pa.}}$$

3.15 Grenzschichttheorie

Ludwig Prandtl begann 1901 mit experimentellen Untersuchungen von Strömungsvorgängen, die zu grundlegenden Forschungsergebnissen führten. Es konnte nachgewiesen werden, dass bei turbulenter Strömung in einem Rohr oder Kanal in einem sehr geringen Abstand von der Rohr- oder Kanalwand die Strömungsgeschwindigkeit eines Fluids bereits denjenigen Wert erreicht, der annähernd dem Wert bei reibungsfreier Strömung entspricht. An der Wand selbst haftet das Fluid durch Oberflächenreibung. Dort beträgt die Strömungsgeschwindigkeit Null. Dicht an der Wand muss demnach eine dünne Übergangsschicht mit einem starken Geschwindigkeitsgefälle vorhanden sein. Prandtl nannte diese Schicht „Grenzschicht“. Das Geschwindigkeitsgefälle lässt sich so erklären, dass sich die Zähigkeit des Fluids hauptsächlich in der Grenzschicht auswirkt, wohingegen in der Mittelströmung die Zähigkeit praktisch keine Bedeutung hat.

Betrachtet man die Strömung im Bereich einer Einströmdüse (Bild 70 oben), dann wird die Strömung wie ein reibungsfreies Fluid beschleunigt und erreicht – genau wie dieses – hinter der Einströmdüse eine über der Querschnittsfläche praktisch konstante Strömungsgeschwindigkeit mit nahezu rechteckigem Geschwindigkeitsprofil. Eine Grenzschicht ist in diesem Bereich praktisch nicht vorhanden. Hinter der Beschleunigungsstrecke nimmt die Grenzschichtdicke langsam zu, und es bildet sich dadurch allmählich das turbulente Geschwindigkeitsprofil aus.

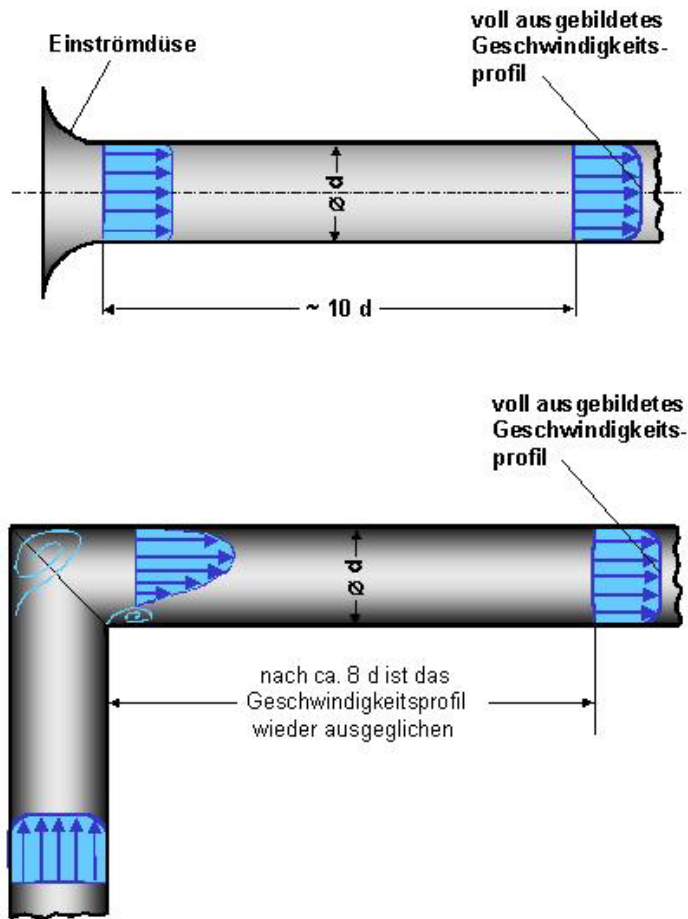


Bild 70: Geschwindigkeitsprofile in Rohren

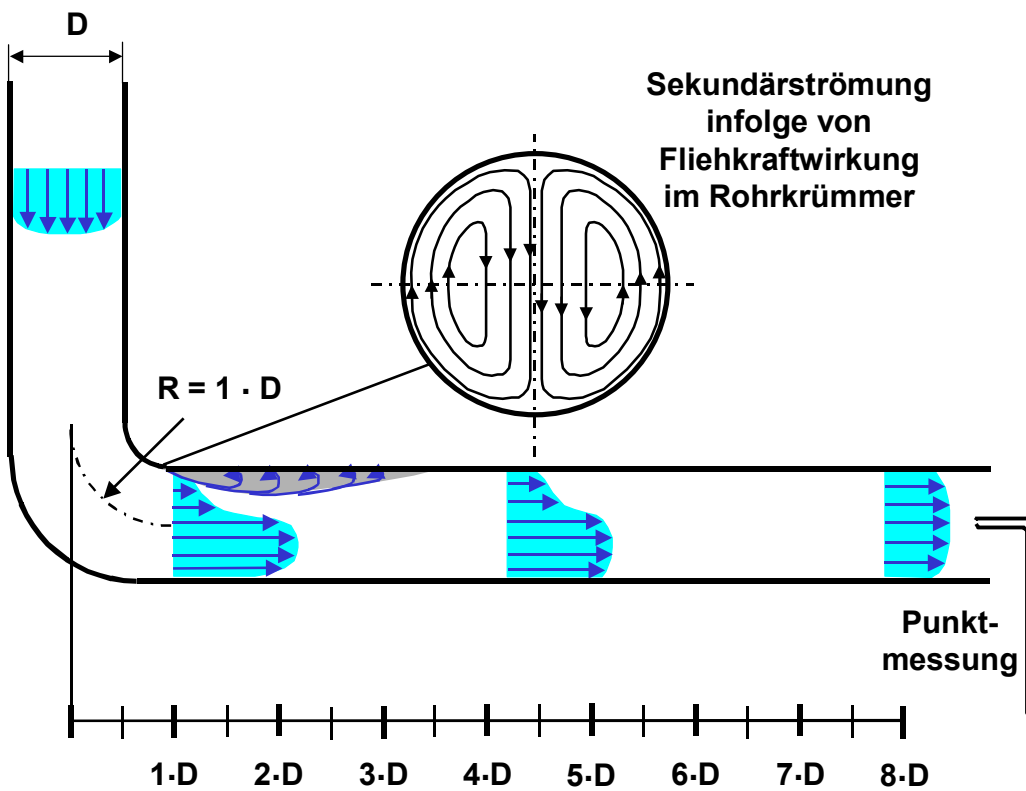


Bild 71: Geschwindigkeitsprofile in einem Rohrkrümmer

Dies ist nach einer Entfernung von etwa 10 Rohrdurchmessern von der Einströmdüse abgeschlossen.

Bei plötzlichen Querschnittsveränderungen in Rohren oder Strömungskanälen, an Vorsprüngen, Erweiterungen, aber auch hinter Abzweigungen löst sich die Strömung von der Wand ab. Zwischen der Wand und der Hauptströmungsrichtung bildet sich dabei ein sogenanntes Totwassergebiet. Das sind Bereiche, die mit wirbelndem Fluid erfüllt sind. Das Bild 70 unten zeigt ein solches Totwassergebiet hinter einem scharfkantigen, rechtwinkligen Rohrkrümmer. Es stellt sich ein ungleichmäßiges Geschwindigkeitsprofil ein. Die Aufrechterhaltung dieser Wirbel erfordert Energie. Diese Energie wird der Strömungsenergie des Fluids entzogen. Bei Strömungsablösung entsteht immer ein Verlust an Nutzenergie. Nach einer Entfernung von etwa 8 Rohrdurchmessern von der Unstetigkeitsstelle ist das Geschwindigkeitsprofil wieder ausgeglichen. Ähnliche Erscheinungen wie bei einem scharfkantigen Rohrkrümmer sind auch bei Rohrkrümmern mit einem größeren Krümmungsradius zu beobachten (Bild 71). Auf der Innenseite des Krümmers bilden sich Ablösewirbel. Aufgrund der Fliehkraft des Fluids im Krümmer wird eine Sekundärströmung hervorgerufen. Durch entsteht eine unterschiedliche Verteilung des statischen Druckes im Strömungsquerschnitt. Der statische Druck an der Außenseite des Rohrkrümmers ist deutlich höher als an seiner Innenseite. Die Sekundärströmung überlagert sich der axial gerichteten Hauptströmung. Das führt zu einer doppelschraubenförmigen Durchströmung des Rohrkrümmers. Dieser Effekt ließe sich jedoch durch den Einbau von Leitblechen verringern. Dadurch könnte außerdem die Widerstandszahl ζ deutlich herabgesetzt werden. Dies ist jedoch nur bei Rohrkrümmern mit großen Strömungsquerschnitten sinnvoll. Nach einer Entfernung von etwa 8 Rohrdurchmessern hinter dem Krümmer ist auch hierbei das Geschwindigkeitsprofil wieder ausgeglichen. Ab hier ist der statische Druck im Strömungsquerschnitt wieder konstant, ab hier wäre eine geeignete Stelle für eine Druckmessung im Rohr gegeben.

3.16 Volumenstrommessung in Leitungen

In der Wettertechnik kommt es häufig vor, den durch einen Grubenbau fließenden Wettervolumenstrom oder den durch eine Leitung fließenden Gas- oder Flüssigkeitsvolumenstrom zu ermitteln. Dazu verwendet man häufig Drosselmesswertgeber wie zum Beispiel Einlaufmessdüsen, Messblenden oder Mess-Venturidüsen (Bild 72).

Die Wirkung dieser Drosselmesswertgeber beruht auf der Geschwindigkeitssteigerung in dem durch die Düse bzw. Blende verengten Querschnitt. Aus der gemessenen Druckdifferenz Δp kann der Volumenstrom nach Gleichung (83) berechnet werden:

$$\dot{V} = \alpha \cdot \varepsilon \cdot (\pi / 4) \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \Delta p / \rho} \tag{83}$$

$m_A = (d / D)^2$	$\alpha_{\text{Düse}}$	α_{Blende}	$\alpha_{\text{Venturidüse}}$
0,05		0,598	
0,10	0,989	0,602	0,989
0,15	0,993	0,608	1,001
0,20	0,999	0,615	1,001
0,25	1,007	0,624	1,010
0,30	1,017	0,634	1,020
0,35	1,029	0,645	1,032
0,40	1,043	0,660	1,048
0,45	1,060	0,676	1,067
0,50	1,081	0,695	1,091
0,55	1,108	0,716	1,120
0,60	1,142	0,740	1,155

Tabelle 6: Durchflusszahl α für Messdüsen, Messblenden und Venturidüsen

Darin ist α die dimensionslose Durchflusszahl und ϵ die dimensionslose Expansionszahl. Die Durchflusszahlen hängen bei der Venturidüse vom Öffnungsverhältnis $m_A = (d / D)^2$, bei Düsen und Blenden außerdem auch noch von der Reynolds-Zahl Re ab. Ungefähre Werte für die Durchflusszahl α sind der Tabelle 6 zu entnehmen. Bei der Verwendung genormter Düsen und Blenden sind die Werte dort zu entnehmen.

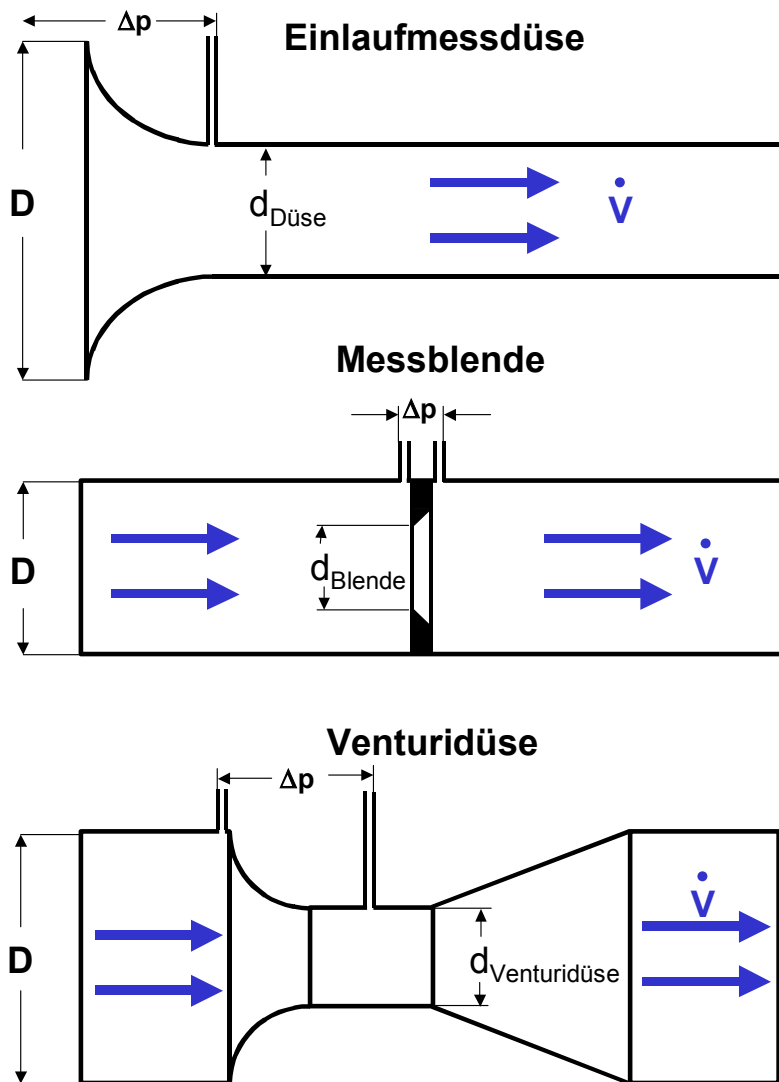


Bild 72: Drosselmesswertgeber zur Ermittlung des Volumenstroms

Bei größeren Druckänderungen ergeben sich bei Gasen Volumenänderungen, die nicht mehr vernachlässigbar sind. Daher ist im engsten Querschnitt das Volumen aufgrund der Expansion größer. Bei der Blende wird außerdem die Strömung durch Kontraktion beeinflusst. Diese Einflüsse werden durch die Expansionszahl ϵ berücksichtigt. Bild 73 zeigt beispielhaft Expansionszahlen für Düsen und Blenden. Der in der Ordinate enthaltene Faktor κ ist der Isentropenexponent (siehe Kapitel 2.3). Bei der Verwendung genormter Düsen und Blenden sind die Werte dort zu entnehmen.

Zur Überwachung des Wettervolumenstroms von Hauptventilatoranlagen befinden sich in den Wetterkanälen häufig sogenannte Germer-Düsen. Im Gegensatz zur Venturidüse, die über ihren gesamten Kreisquerschnitt gleichmäßig eingeengt ist, erfolgt die Einengung bei Germer-Düsen oft nur ein- oder zweiseitig im Rechteckquerschnitt des Wetterkanals. Die zugehörigen Durchflusszahlen α und die Expansionszahlen ϵ sind durch Kalibrierung im Einzelfall zu bestimmen. Meistens ermittelt man dabei der Einfachheit halber einen Koeffizienten, der aus dem Produkt von α und ϵ besteht.

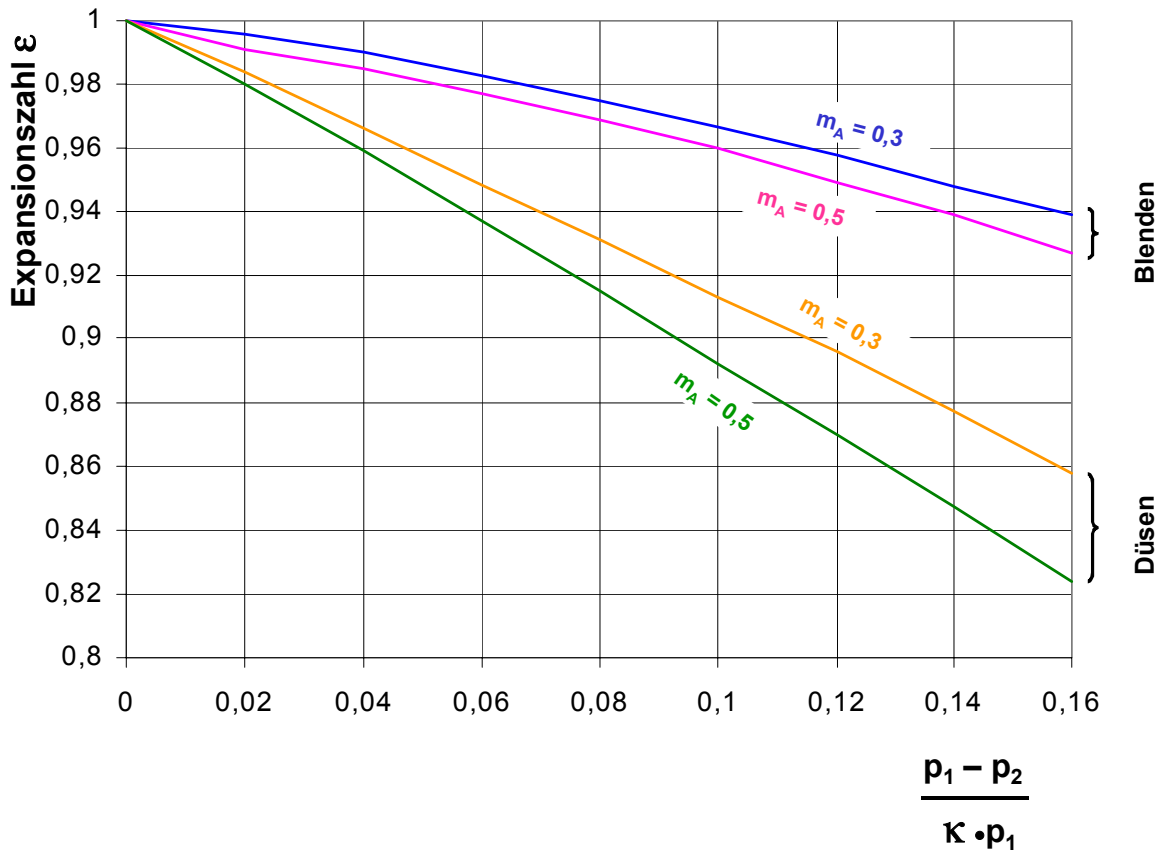


Bild 73: Expansionszahlen für Düsen und Blenden

3.17 Schwerlinienverfahren

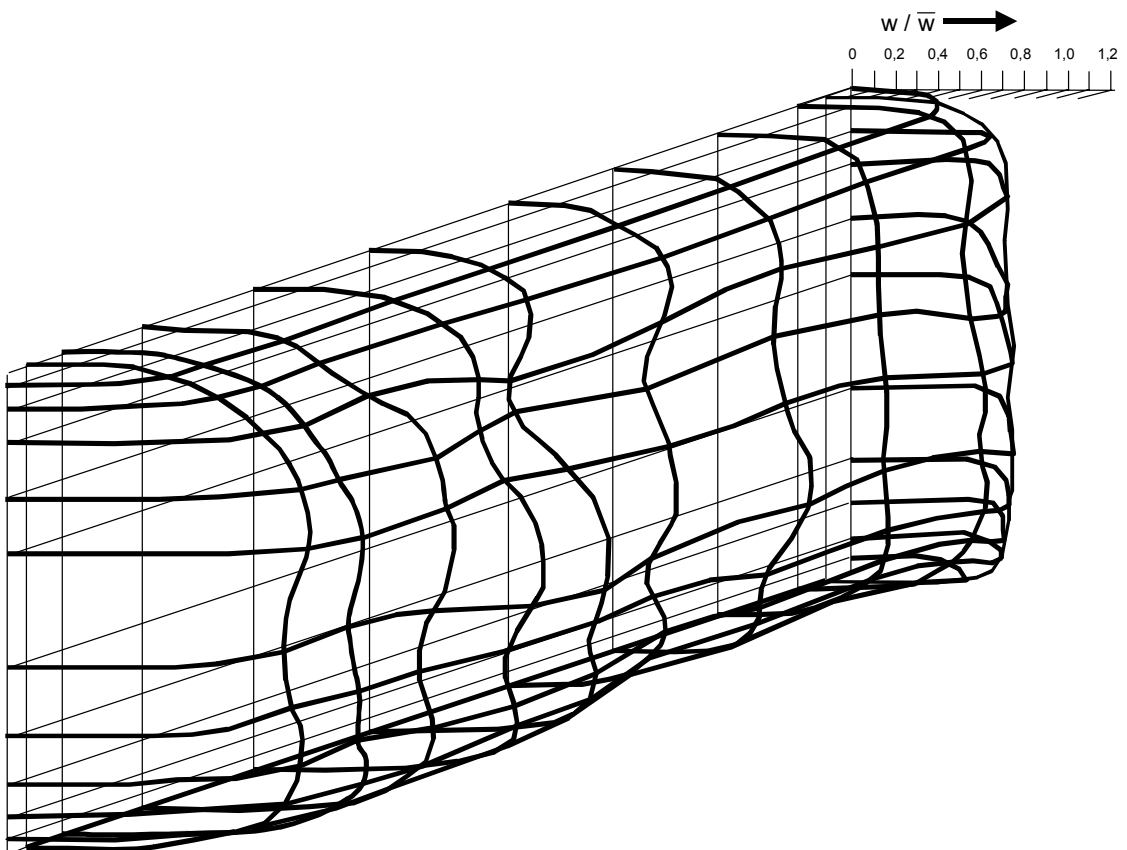


Bild 74: Nicht symmetrische Geschwindigkeitsverteilung in einem rechteckigen Leitungsquerschnitt

Bei Untersuchungen in Lutzenleitungen oder bei Abnahmeuntersuchungen maschinentechnischer Anlagen wie z. B. Hauptventilatoren oder Klimatisierungsanlagen ist es zuweilen erforderlich, auch dann, wenn in den Leitungsquerschnitten eine nicht symmetrische Geschwin-

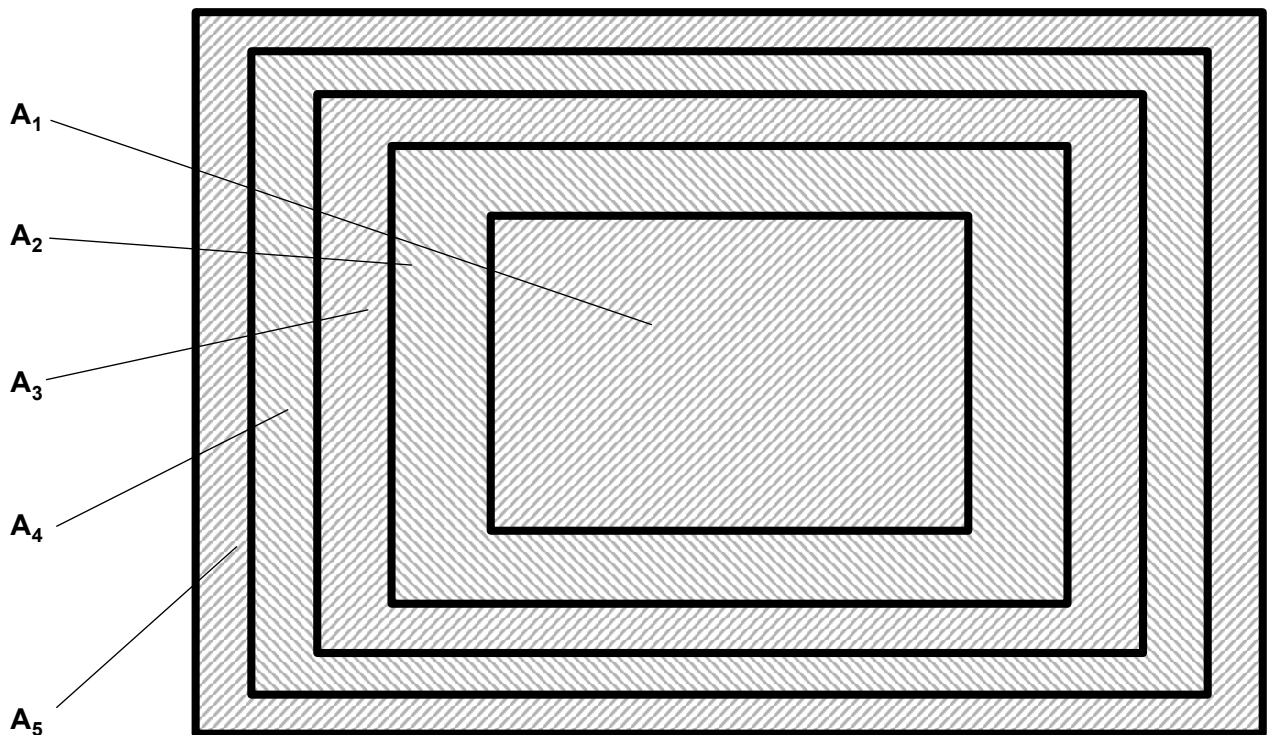
digkeitsverteilung herrscht (Bild 74), den Volumenstrom \dot{V} bzw. die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} zu bestimmen. Dazu eignet sich eine Netzmessung nach dem Schwerlinienverfahren.

Die Messpunktanordnung bei einer Netzmessung sollte so sein, dass ein Geschwindigkeitsprofil mit einer möglichst geringen Anzahl von Messpunkten möglichst gut erfasst werden kann. Das heißt in Bereichen großer Geschwindigkeitsgradienten muss eine dichtere Messpunktfolge vorgesehen werden.

Um die mittlere Geschwindigkeit bzw. den Volumenstrom durch einfache gewogene arithmetische Mittelung bestimmen zu können, muss für jede Teilfläche im Leitungsquerschnitt, die einem Messpunkt zugeordnet ist, eine örtliche Geschwindigkeit gemessen werden, die der mittleren Geschwindigkeit dieser Teilfläche entspricht. Sind alle Teilflächen gleich groß, dann ist die mittlere Geschwindigkeit im Leitungsquerschnitt gleich dem arithmetischen Mittelwert aller in den Teilflächen gemessenen Geschwindigkeiten.

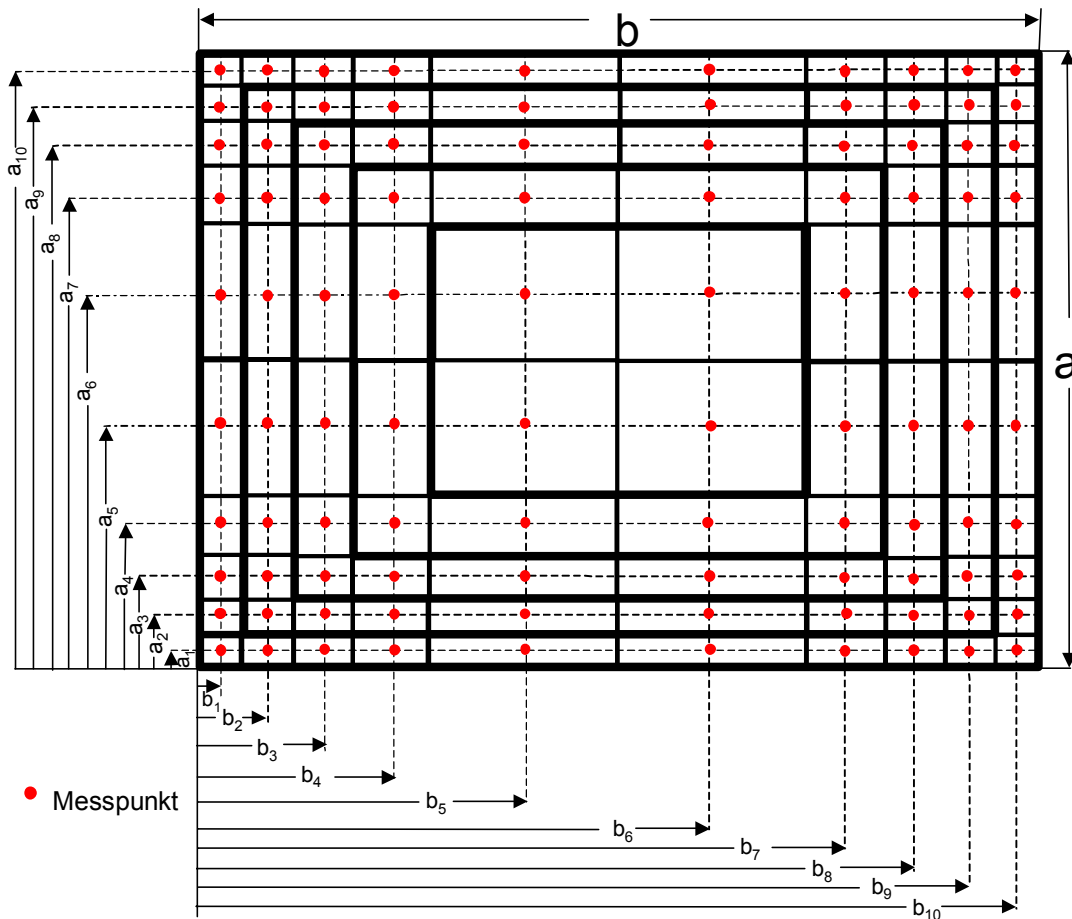
3.17.1 Netzmessung in Rechteckquerschnitten

Ein Rechteckquerschnitt mit den Kantenlängen **a** und **b** wird dazu in **n** konzentrische, flächengleiche Rahmen aufgeteilt (Bild 75).



$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$$

Bild 75: Aufteilung eines Rechteckquerschnitts in konzentrische, flächengleiche Rahmen



$\frac{a_1}{a}$ $\frac{b_1}{b}$	$\frac{a_2}{a}$ $\frac{b_2}{b}$	$\frac{a_3}{a}$ $\frac{b_3}{b}$	$\frac{a_4}{a}$ $\frac{b_4}{b}$	$\frac{a_5}{a}$ $\frac{b_5}{b}$	$\frac{a_6}{a}$ $\frac{b_6}{b}$	$\frac{a_7}{a}$ $\frac{b_7}{b}$	$\frac{a_8}{a}$ $\frac{b_8}{b}$	$\frac{a_9}{a}$ $\frac{b_9}{b}$	$\frac{a_{10}}{a}$ $\frac{b_{10}}{b}$
0,02639	0,08274	0,14824	0,23008	0,38820	0,61180	0,76992	0,85176	0,91726	0,97361

Bild 76: Verteilung der Messpunkte zur Anwendung des Schwerlinienverfahrens

Die Unterteilung des Rechtecks in Teilflächen ergibt sich – wie aus dem Bild 76 ersichtlich – zunächst durch Aufteilung der inneren Teilfläche A_1 in vier gleich große Unter-Teilflächen. Danach werden die Rahmenkanten bis zum Rechteckrand verlängert. Die Messpunkte sind dann die Mittelpunkte (Schwerpunkte) dieser einzelnen Teilflächen. Bei der Durchführung der Messung wird die Messsonde von einer Rechteckseite aus (im angegebenen Beispiel an 10 Stellen) eingeführt und entlang der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller auf einem Streifen liegenden Teilflächen geführt. Bei dieser Methode hat man den Vorteil, dass am Umfang des Rechteckquerschnitts – dort wo die Geschwindigkeitsgradienten am größten sind – eine große Anzahl von Messpunkten vorhanden sind, in der Querschnittsmitte befinden sich dagegen nur wenige Messpunkte.

Bei der Ermittlung der mittleren Geschwindigkeit muss man noch die gemessenen Geschwindigkeiten entsprechend ihrer Flächenanteile „gewichten“. Aus den Abmessungen der einzelnen Teilflächen ergeben sich die „Gewichte“ der jeweiligen Teilflächen. Die symmetrisch zu den Rechteck-Diagonalen liegenden Teilflächen sind gleich groß (siehe Bild 77).

$$g_{ij} = g_{ji}$$

0,0139	0,0158	0,0188	0,0244	0,0590					
0,0158									
0,0188									
0,0244					0,0136	0,0429			
0,0590				0,25		0,0136			
	0,0670						0,0759		
	0,0277						0,0329		
	0,0213				0,0759	0,0329	0,0253		
	0,0179	0,0213	0,0277	0,0670					

**Bild 77: Schwerlinienverfahren für Rechteckquerschnitte
Flächengewichte g_{ij} der Teilflächen**

Bei n Rahmen ist die Summe aller Teilflächengewichte g_{ij} jedes einzelnen Rahmens i entsprechend seiner Definition gleich 1. Bei der Auswertung des Geschwindigkeitsfeldes fasst man diejenigen Geschwindigkeiten w_{ij} bzw. jeweils diejenigen 4 Geschwindigkeiten w_{ij} an den Eckflächen zusammen, denen gleiche Flächengewichte zugeordnet sind. Multipliziert man nun die in jeder Teilfläche eines Rechteckrahmens gemessene Geschwindigkeit w_{ij} mit dem zugehörigen Flächengewicht g_{ij} und bildet für diesen Rechteckrahmen die Summe daraus, erhält man aus der somit „gewichteten“ Geschwindigkeitsverteilung eines jeden Rechteckrahmens seine mittlere Geschwindigkeit.

$$\bar{w}_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} w_{ij} \quad \left| \quad i = \text{const} \right. \quad (84)$$

Das arithmetische Mittel aller mittleren Geschwindigkeiten \bar{w}_i ergibt schließlich die mittlere Geschwindigkeit im Rechteckquerschnitt

$$\bar{w} = (\bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots + \bar{w}_n) / n \quad (85)$$

3.17.2 Netzmessung in Kreisquerschnitten

Der kreisrunde Leitungsquerschnitt wird durch konzentrische Kreise in n flächengleiche Teilquerschnitte geteilt (Bild 78).

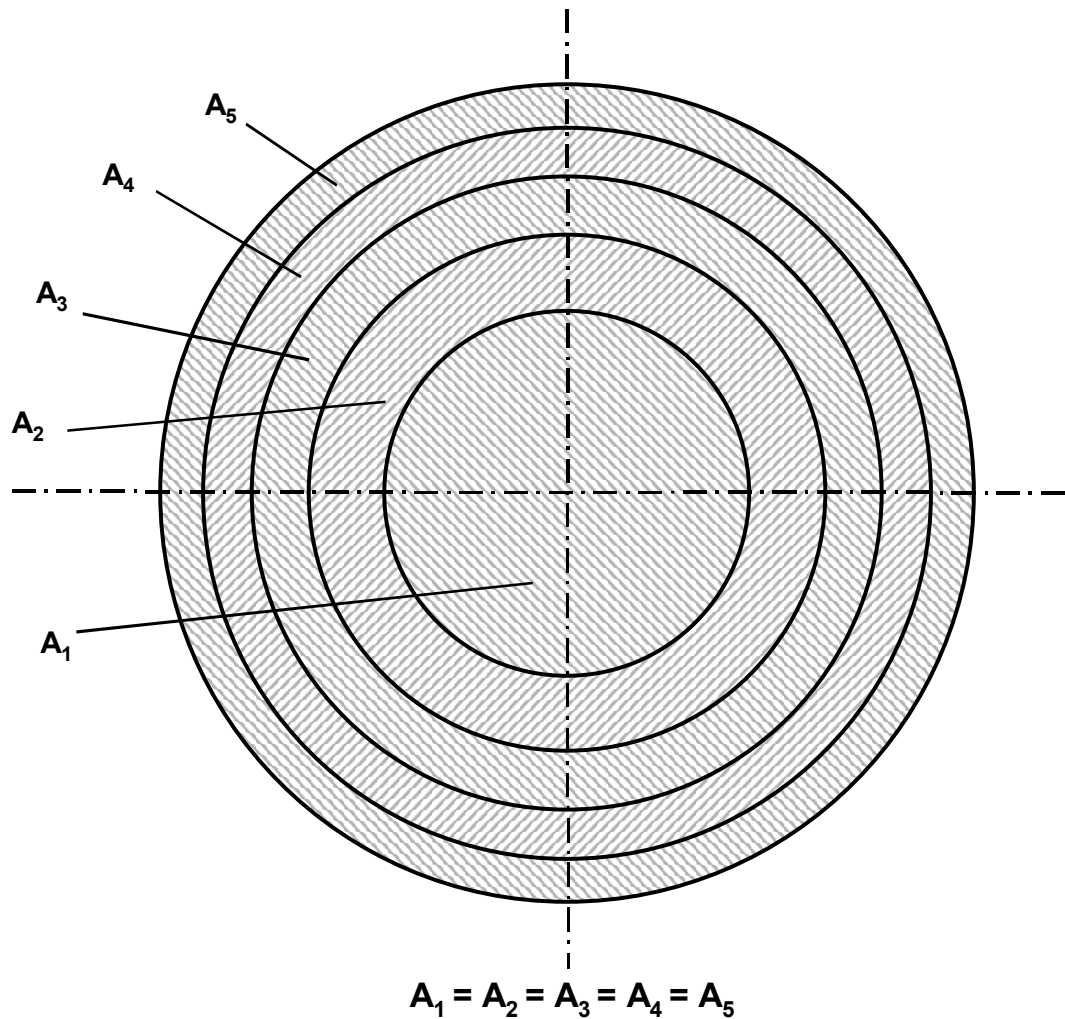


Bild 78: Aufteilung eines Kreisquerschnitts in konzentrische, flächengleiche Teilquerschnitte

Nun teilt man jede dieser Teilflächen A_i durch einen weiteren konzentrischen Kreis derart auf, so dass jede Teilfläche A_i halbiert wird (Bild 79). Diese Kreise bilden die Schwerlinien der Teilflächen, auf denen die Messpunkte für das Schwerlinienverfahren liegen. Gemessen von der Rohrwand ergeben sich für die einzelnen Messpunkte die in Bild 80 angegebenen Abstände. Bei der Durchführung der Messung wird die Messsonde entlang der Verbindungslinie der Schwerlinien (im angegebenen Beispiel an 10 Messpunkte) geführt.

Bei dieser Methode hat man den Vorteil, dass am Umfang des Kreisquerschnitts – dort wo die Geschwindigkeitsgradienten am größten sind – eine große Anzahl von Messpunkten vorhanden sind, in der Querschnittsmitte befinden sich dagegen nur wenige Messpunkte. Bei ungleichförmigen Geschwindigkeitsprofilen ist es zweckmäßig, die Messsonde entsprechend der Schwerlinienmessung über den Umfang des Kreisquerschnittes verteilt (z. B. jeweils um 45° versetzt) mehrfach neu anzusetzen.

Im Gegensatz zu Messungen in Rechteckquerschnitten bestehen bei Kreisquerschnitten flächengleiche Teilflächen für die einzelnen Messpunkte. Die Bildung der mittleren Geschwindigkeit ist somit als arithmetisches Mittel aus den Einzelmesspunkten ohne Berücksichtigung der „Gewichte“ der Flächenanteile direkt möglich:

$$\bar{w} = (\bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots + \bar{w}_n) / n \tag{86}$$

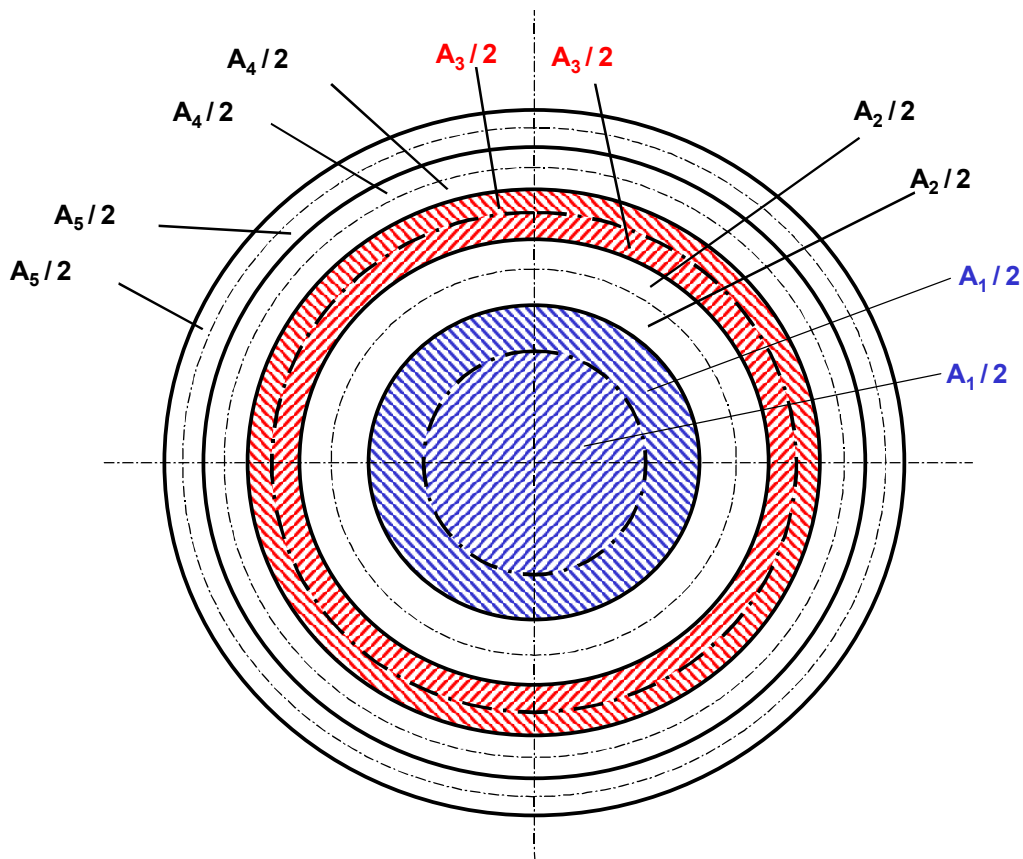


Bild 79: Ermittlung der Schwerlinien für Kreisquerschnitte

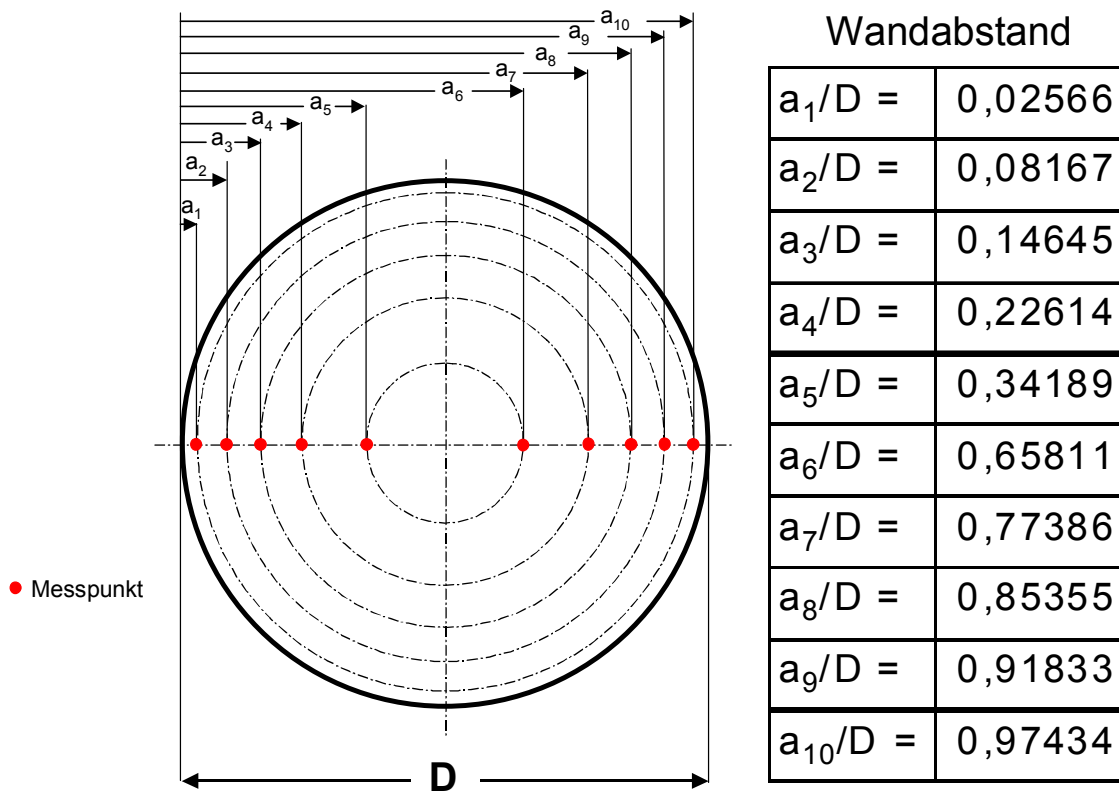


Bild 80: Abstände der Messpunkte von der Rohrwand bei Kreisquerschnitten

3.18 Literaturverzeichnis

- [66] Becker, E., E. Piltz: *Übungen zur Technischen Strömungslehre*. ISBN 3-519-03024-1, Stuttgart, B. G. Teubner, 1971.
- [67] Becker, E.: *Technische Strömungslehre*. Stuttgart, B. G. Teubner, 1968.
- [68] Beitz, W., K.-H. Grote (Herausg.): *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*. ISBN 3-540-67777-1, 20., neubearb. u. erw. Aufl., Heidelberg, Springer-Verlag, 2001.
- [69] Blasius, H.: *Das Reibungsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten*. Forsch. Arb. Ing.-W., Heft 131, 1913.
- [70] Colebrook, C.F.: *Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws*. J. Institution Civil Engineers 12 (1939), no. 4, S. 133 – 156.
- [71] Gersten, K.: *Einführung in die Strömungsmechanik*. ISBN 3-571-15015-5, Düsseldorf, Bertelsmann Universitätsverlag, 1974.
- [72] Kalide, W.: *Einführung in die technische Strömungslehre*. München, Carl Hanser Verlag, 1965.
- [73] Kirschmer, O.: *Tabellen zur Berechnung von Rohrleitungen nach Prandtl-Colebrook*. Heidelberg, Straßenbau-Verlag, 1963.
- [74] Renner, K.: *Berücksichtigung der Randzone bei der Durchführung von Netzmessungen*. VDI-Berichte, Nr. 254, 1976.
- [75] Renner, K.: *Zur Netzmessung in Rechteckquerschnitten*, VDI-Berichte, Nr. 254, 1976.
- [76] Renner, K.: *Zur Volumenstrom-Messung mit Drosselmessgeräten in Rechteck-Leitungen*. Sonderdruck aus JCE-Berichte IV, Stuttgart, J. C. Eckardt AG, 1971.
- [77] Richter, W.: *Volumenstrommessung in Leitungen mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt*. Brennstoff-Wärme-Kraft 22 (1970), Nr. 11, S. 523 – 525.
- [78] Richter, W.: *Volumenstrommessung in lufttechnischen Leitungen mit unregelmäßigem Geschwindigkeitsprofil*. Forschungsberichte aus dem Gebiet der Luft- und Trocknungstechnik Heft 8, Vortrag: Forschungsvereinigung für Luft- und Trocknungstechnik, Frankfurt / Main, 24.06.1971.
- [79] Turbo-Lufttechnik GmbH (Hrsg.): *Ventilatoren-Fibel*, ISBN 3-00-003293-2, Karlsruhe, Promotor-Verlag.